2023 MODELO A.1

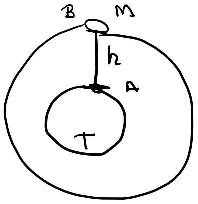
Un satélite de 400 kg de masa orbita alrededor de la Tierra describiendo una órbita circular a una altura de 15000 km. Calcule:

a) La energía que hubo que transmitirle para ponerlo en órbita desde la superficie de la Tierra y su periodo.

b) La energía mínima que hay que suministrarle para que escape de la atracción gravitatoria terrestre desde su órbita actual.

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67 $\cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24} Kg$, Radio de la Tierra, $R_T = 6370 km$.

a)



$h = 15000 Km = 1{,}5 \cdot 10^7 m$

$m = 400 kg$

① $r = R_T + h = 6{,}37 \cdot 10^6 m + 1{,}5 \cdot 10^7 = 2{,}137 \cdot 10^7 m$

② La energía necesaria es la diferencia de energía entre la superficie y la órbita.

• $E_{MA} = \cancel{Ec_A}^{0} + Ep_A = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$

$\Rightarrow E_{MA} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}94 \cdot 10^{24} \cdot 400}{6{,}37 \cdot 10^6} = -2{,}5 \cdot 10^{10} J$

• $E_{MB} = Ec_B + Ep_B$ • $F_c = F_G \Rightarrow \frac{m v^2}{\cancel{r}} = G \cdot \frac{M \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}94 \cdot 10^{24}}{2{,}137 \cdot 10^7}}$

$\Rightarrow v = 4305{,}8 m/s$

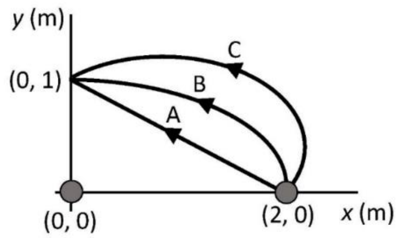
$\Rightarrow E_{MB} = \frac{1}{2} \cdot m v_B^2 - G \cdot \frac{Mm}{r^2} = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 4305{,}8^2 - 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}94 \cdot 10^{24} \cdot 400}{(2{,}137 \cdot 10^7)^2} = 3{,}71 \cdot 10^9 J$

• $\Delta E_M = E_{MB} - E_{MA} = 3{,}71 \cdot 10^9 - 2{,}5 \cdot 10^{10} = \boxed{-2{,}13 \cdot 10^{10} J}$

③ $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 2{,}137 \cdot 10^7}{4305{,}8} = \boxed{3{,}12 \cdot 10^4 s}$

b) $\Delta E_M = \cancel{E_{M\infty}}^{0} - E_{MB} = -E_{MB} = \boxed{-3{,}71 \cdot 10^9 J}$

2023 MODELO B.1



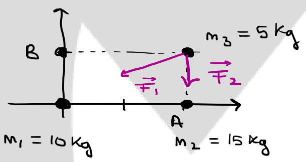
Dos masas m_1 = 10 kg y m_2= 15 kg se encuentran situadas en los puntos (0, 0) m y (2, 0) m respectivamente, del plano xy.

a) Calcule la fuerza gravitatoria debida a las masas m_1 y m_2 que experimentará una masa de 5 kg situada en el punto (2, 1) m.

b) Halle el trabajo que realiza el campo gravitatorio creado por la masa m_1 cuando la masa m_2 se desplaza del punto (2, 0) m al punto (0, 1) m a través de los tres caminos representados en la figura, asumiendo que la masa de 5 kg del apartado anterior no está presente.

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67 $\cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

a)



$\vec{F_G} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{u}$

① Distancia entre m_1 y m_3: $d = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} m$

② $\vec{F_{G1}} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10 \cdot 5}{\sqrt{5}^2} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = (-5{,}97 \cdot 10^{-10}; -2{,}98 \cdot 10^{-10}) N$

③ $\vec{F_{G2}} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{15 \cdot 5}{1^2} \cdot \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right) = (0, -5 \cdot 10^{-9}) N$

④ $\vec{F_T} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = (-5{,}98 \cdot 10^{-10}; -5{,}982 \cdot 10^{-9}) N$ ⑤ $|\vec{F_T}| = \sqrt{(-5{,}98 \cdot 10^{-10})^2 + (-5{,}98 \cdot 10^{-9})^2} = \boxed{6{,}01 \cdot 10^{-9} N}$

b) Se realizará el mismo trabajo, independientemente del camino:

$W_{A \to B} = -m \cdot (V_B - V_A) = -15 \cdot \left(-G \cdot \frac{M_1}{r_B} + G \cdot \frac{M_1}{r_A}\right) = -15 \cdot \left(-6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{1} + 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10}{2}\right)$

$= \boxed{5 \cdot 10^{-9} J}$

2022 JULIO COINCIDENTES A.1

Sea un satélite geoestacionario de masa 500 kg.

a) Obtenga el radio de la órbita descrita por dicho satélite.

b) Calcule la energía que habría que suministrarle al satélite para que pasase a orbitar en una órbita de radio tres veces mayor que el anterior.

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67 $\cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24} Kg$.

a) ① Geoestacionario significa $T = 24h = 86400 s$.

② $F_c = F_G \Rightarrow \frac{\cancel{m} v^2}{\cancel{r}} = G \cdot \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M}{r}$

③ $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow$ Sustituimos aquí $v^2 = G\frac{M}{r} \Rightarrow \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = G \cdot \frac{M}{r} \Rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M}{r}$

$\Rightarrow r^3 = G \cdot \frac{M \cdot T^2}{4\pi^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{G \cdot \frac{M \cdot T^2}{4\pi^2}}$ $\quad r = \sqrt[3]{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5'97 \cdot 10^{24} \cdot (85400)^2}{4\pi^2}}$

$$\boxed{r = 4'19 \cdot 10^7 m}$$

b) Están pidiendo el incremento de energía mecánica: $\Delta E_M = E_{Mf} - E_{Mo}$

① $E_{Mo} = E_{co} + E_{po} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_o^2 - G \cdot \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{GM}{r} - G\frac{Mm}{r} = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$

• Como $v^2 = G\frac{M}{r}$

$\Rightarrow E_{Mo} = -\frac{1}{2}\frac{GM \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5'97 \cdot 10^{24} \cdot 500}{4'19 \cdot 10^7}$

$E_{Mo} = -2'38 \cdot 10^9 J$

② $E_{Mf} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2} \cdot 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5'97 \cdot 10^{24} \cdot 500}{3 \cdot 4'19 \cdot 10^7} = -7'92 \cdot 10^8 J$

③ $\Delta E_M = -7'92 \cdot 10^8 - (-2'38 \cdot 10^9) = \boxed{1'59 \cdot 10^9 J}$

2022 JULIO COINCIDENTES B.1

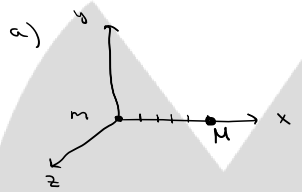
Una partícula de masa $2{\cdot}10^{-3}$ kg se mueve en una trayectoria rectilínea a lo largo del eje x, sometida exclusivamente a la atracción gravitatoria de una partícula de masa M situada en la posición (5, 0, 0) m. Cuando la partícula de $2{\cdot}10^{-3}$ kg pasa por el origen de coordenadas, tiene una velocidad de $1{\cdot}10^{-3} m \cdot s^{-1}$ y una energía mecánica de $9{,}9{\cdot}10^{-10}$ J. Determine:

a) El potencial gravitatorio creado en el origen de coordenadas por la partícula de masa M.

b) El valor de la masa M.

Dato: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

a)



$m = 2 \cdot 10^{-3} kg$

$v = 1 \cdot 10^{-3} m/s$

$E_M = 9'9 \cdot 10^{-10} J$

① Potencial gravitatorio $\Rightarrow V = \frac{E_p}{m} = -G\frac{M}{r}$

② $E_M = E_c + E_p \Rightarrow 9'9 \cdot 10^{-10} = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$

$\Rightarrow E_p = 9'9 \cdot 10^{-10} - \frac{1}{2}mv^2$

$\Rightarrow E_p = 9'9 \cdot 10^{-10} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot (1 \cdot 10^{-3})^2 = -1 \cdot 10^{-11} J$

③ $V = \frac{E_p}{m} = \frac{-1 \cdot 10^{-11}}{2 \cdot 10^{-3}} = \boxed{-5 \cdot 10^{-9} J/kg}$

b) Como $E_p = -G\frac{Mm}{r} \Rightarrow -1 \cdot \cancel{10^{-11}} = -6'67 \cdot \cancel{10^{-11}} \cdot \frac{M \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{5} \Rightarrow M = \frac{-1 \cdot 5}{-6'67 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = \boxed{374'81 kg}$

2022 JULIO A.1

El satélite Sentinel-1, que forma parte del programa Copernicus, ha suministrado imágenes muy útiles para el estudio de la erupción del volcán de La Palma en 2021. Sentinel-1 tiene una masa de 2300 kg y se encuentra en una órbita circular a 700 km sobre la superficie terrestre.

a) Deduzca la expresión que relaciona el periodo del satélite, T, con el radio de su órbita, r, la constante de Gravitación Universal, G, y la masa de la Tierra, M. Calcule el tiempo que tarda Sentinel-1 en dar una vuelta completa en su órbita.

b) Deduzca la expresión de la energía mecánica total de un satélite de masa m en una órbita circular de radio r, expresándola en función de G, M, m y r. Obtenga la energía mecánica total del satélite Sentinel-1.

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24} Kg$; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6 m$.

a) $m = 2300 kg$

$h = 700 km$

① Utilizamos $F_c = F_G$ y $v = \frac{2\pi r}{T}$

② $F_c = F_G \Rightarrow \frac{\cancel{m} v^2}{\cancel{r}} = G \cdot \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M}{r} \Rightarrow \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = G \cdot \frac{M}{r} \Rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M}{r}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}}$

③ Ahora nos piden el T. Para ello necesitamos el radio orbital: $r = h + r_p = 700 \cdot 10^3 m + 6'37 \cdot 10^6 m$

$r = 7'07 \cdot 10^6$ m.

④ Como $\frac{r^3}{T^2} = \frac{G M}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{r^3 \cdot 4\pi^2}{G \cdot M} = T^2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{r^3 \cdot 4\pi^2}{G \cdot M}} = \sqrt{\frac{(7'07 \cdot 10^6)^3 \cdot 4 \cdot \pi^2}{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 5'97 \cdot 10^{24}}} = \boxed{5.919'14 s}$

L) ① Como $E_M = E_c + E_p \Rightarrow E_M = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M \cdot m}{r}$

② Como $v^2 = G \cdot \frac{M}{r} \Rightarrow E_M = \frac{1}{2} \cdot m \cdot G \cdot \frac{M}{r} - G \cdot \frac{M \cdot m}{r} \Rightarrow E_M = \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M m}{r} - G \cdot \frac{M m}{r}$

③ Haciendo denominador común: $\boxed{E_M = -\frac{1}{2} \cdot G \frac{M m}{r}}$

④ Ahora la calculamos: $E_M = -\frac{1}{2} \cdot 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5'97 \cdot 10^{24} \cdot 2300}{7'07 \cdot 10^6} = \boxed{-6'45 \cdot 10^{10} J}$

2022 JULIO B.1

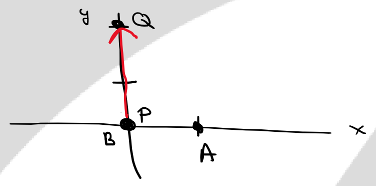
En el punto (1, 0) m del plano (x, y) se encuentra una partícula A de masa m_A = 2 kg. Se sabe que para llevar una partícula B de masa m_B desde el origen de coordenadas al punto (0, 2) m el trabajo realizado por la fuerza del campo gravitatorio creado por la masa m_A es $-2{,}95 \cdot 10^{-10} J$

a) ¿Cuál es el valor de la masa m_B?

b) Calcule el valor del campo gravitatorio que crea la masa m_A en el punto (0, 2) m.

Dato: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67 $\cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

a)



$m_A = 2 kg$

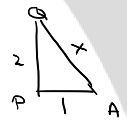
$W_{o \to f} = -2'95 \cdot 10^{-10} J$

① Sabemos que:

$W_{P \to Q} = -m \cdot \Delta V$ → Voy a resolverlo con esta.

$W_{P \to Q} = -\Delta E_p$

② $W_{P \to Q} = -m \cdot \Delta V \Rightarrow -2'95 \cdot 10^{-10} = -m_B \cdot (V_f - V_o)$



$x = \sqrt{2^2 + 1^2}$

$x = \sqrt{5}$

• $V_f = V_{A-P} = -G \cdot \frac{M_A}{r} = -6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{1} = -133'4 \cdot 10^{-12}$ V

• $V_o = V_{A-Q} = -G \frac{M_A}{r} = -6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -59'7 \cdot 10^{-11}$ V.

③ $-2'95 \cdot 10^{-10} = -m_B \cdot (-5'97 \cdot 10^{-11} + 1'334 \cdot 10^{-10}) \Rightarrow m_B = \frac{+2'95 \cdot 10^{-10}}{(-59'7 \cdot 10^{-11} + 133'4 \cdot 10^{-12})} = \boxed{4 kg}$

b) Campo gravitatorio: $P = F_G \Rightarrow \cancel{m} g = G \cdot \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} \Rightarrow g = G \frac{M}{r^2}$

$g = 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}^2} = \boxed{2'67 \cdot 10^{-11} N/Kg \text{ o } m/s^2}$

2022 JUNIO COINCIDENTES A.1

Tianwen-1 es una misión espacial china para aterrizar en el planeta Marte. El 10 de febrero de 2021 la nave (un módulo de aterrizaje acoplado a un orbitador) entró en órbita marciana. Suponga que la órbita es circular y que el periodo de revolución es de 12 h.

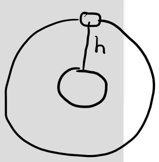
a) Determine la altura sobre la superficie del planeta a la que orbita la nave espacial.

b) El 15 de mayo de 2021 el módulo de aterrizaje se separa del orbitador y, tras poner en marcha sus retrocohetes que reducen su velocidad orbital a cero, cae sobre la superficie del planeta. Si no hubiesen funcionado los sistemas de frenado, ¿a qué velocidad hubiera impactado el módulo de aterrizaje en caída libre?

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = 6,67 $\cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; Masa de Marte, M_M = 6,39 $\cdot 10^{23} Kg$; Radio de Marte, R_M = 3390 km.

a) MCU

$T = 12h = 43200 s.$



① $F_c = F_G \Rightarrow \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = G \cdot \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M}{r}$

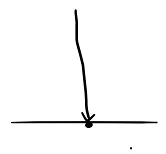
② $\left\{\begin{array}{l} v^2 = G\cdot\frac{M}{r} \\ v=\frac{2\pi r}{T}\end{array}\right. \Rightarrow \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = G\cdot\frac{M}{r} \Rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M}{r}$

$\Rightarrow r^3 = G\cdot\frac{M\cdot T^2}{4\pi^2} \qquad r=\sqrt[3]{\frac{6'67\cdot10^{-11}\cdot 6'39\cdot10^{23}\cdot 43200^2}{4\pi^2}}$

$r = 1'26\cdot10^7\,m.$

③ $h = r - r_p = 1'26\cdot10^7 - 3'39\cdot10^6 = \boxed{9'21\cdot10^6\,m}$

b) $v_0 = 0\,m/s$ ① $E_{M0} = E_{Mf} \Rightarrow \cancel{E_{c0}}^{\,0} + E_{p0} = E_{cf} + E_{pf}$



$\Rightarrow -G\frac{M\cancel{m}}{r} = \frac{1}{2}\cancel{m}v_f^2 - G\frac{M\cancel{m}}{r}$

$\Rightarrow -6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{6'39\cdot10^{23}}{1'26\cdot10^7} = \frac{1}{2}\cdot v_f^2 - 6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{6'39\cdot10^{23}}{3'39\cdot10^6}$

$\rightarrow \frac{1}{2}v_f^2 = 9'19\cdot10^6 \Rightarrow v_f = \sqrt{2\cdot9'19\cdot10^6} = \boxed{4287'19\ m/s}$

2022 JUNIO COINCIDENTES B.1

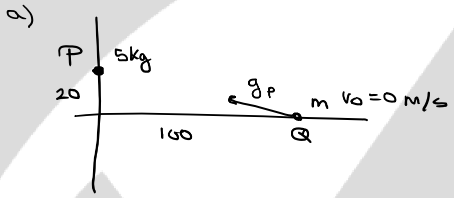
Una masa puntual de 5 kg se encuentra fija en el punto P (0, 20) m del plano xy. Otra masa puntual m, inicialmente en reposo, se encuentra en el punto Q (100, 0) m.

a) Calcule el campo gravitatorio creado por la masa de 5 kg en el punto Q.

b) Por efecto de la atracción gravitatoria, la masa m se acelera hacia el punto P. Calcule el vector velocidad que poseerá dicha masa cuando pase por el punto (50, 10) m.

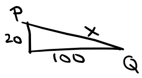
Dato: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67\cdot10^{-11} N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$

a)



① Campo gravitatorio : $P = F_G \Rightarrow \cancel{m}\cdot g = G\cdot\frac{M\cdot\cancel{m}}{r^2} \Rightarrow g = G\cdot\frac{M}{r^2}$

$\vec{g} = -G\cdot\frac{M}{r^2}\cdot\vec{u}$

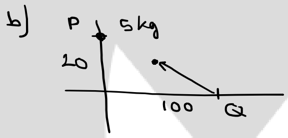
② Distancia entre P y Q :


$x=\sqrt{20^2+100^2} = 101'98\,m.$

③ $\vec{g} = -6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5}{101'98^2}\cdot\left(\frac{100}{101'98}, \frac{-20}{101'98}\right) = \left(-3'14\cdot10^{-14}, 6'29\cdot10^{-15}\right)\ N/kg$

④ $|\vec{g}| = \sqrt{(-3'14\cdot10^{-14})^2+(6'29\cdot10^{-15})^2} = \boxed{3'2\cdot10^{-14}\ N/kg}$

b)



$v_0 = 0\,m/s$ ① $E_{M0} = E_{Mf} \Rightarrow \cancel{E_{c0}}^{\,0} + E_{p0} = E_{cf} + E_{pf}$

$-G\frac{M\cancel{m}}{r_0} = \frac{1}{2}\cancel{m}v_f^2 - G\cdot\frac{M\cancel{m}}{r_f} \Rightarrow -6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5}{101'98} = \frac{1}{2}v_f^2 - 6'67\cdot10^{-11}\cdot\frac{5}{50'975}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}v_f^2 = 3'27\cdot10^{-12} \Rightarrow v_f = \sqrt{2\cdot3'27\cdot10^{-12}} = 2'56\cdot10^{-6}\,m/s$

② $\vec{v} = 2'56\cdot10^{-6}\cdot\left(\frac{-50}{50'975}, \frac{+10}{50'975}\right) = \boxed{(-2'51\cdot10^{6}, 5'022\cdot10^{5})\ m/s}$

2022 JUNIO A.1

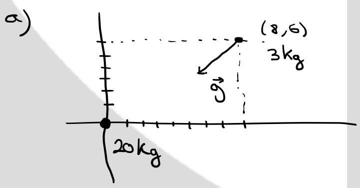
Una partícula de masa 20 kg permanece fija en el origen de coordenadas.

a) Calcule el campo gravitatorio generado por la masa en el punto (8, 6) m y la fuerza que experimentará una segunda partícula de masa 3 kg situada en dicho punto.

b) Con el objetivo de alejar la segunda partícula, se le transmite una velocidad de $1,2\cdot10^{-5} m\cdot s^{-1}$ en la dirección de la recta que une ambas partículas. Halle el punto más alejado del origen que alcanzará dicha partícula.

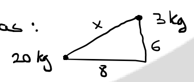
Datos: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67\cdot10^{-11} N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$

a)



① Campo gravitatorio $P = F_G \Rightarrow \cancel{m}\cdot g = G\frac{M\cancel{m}}{r^2} \quad g = G\frac{M}{r^2}$

• Con vector unitario $\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\cdot\vec{u}$

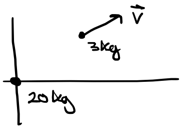
② Distancia entre masas :


$x = \sqrt{8^2+6^2} = 10\,m.$

③ $\vec{g} = -6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{20}{10^2} \cdot \left(\frac{8}{10}, \frac{6}{10}\right) = (-1'07 \cdot 10^{-11}, -8 \cdot 10^{-12})$ N/kg o m/s²

$\boxed{|\vec{g}| = 1'33 \cdot 10^{-11} \text{ N/kg}}$

④ Como $F_G = m \cdot g \Rightarrow F_G = 3 \cdot 1'33 \cdot 10^{-11} = \boxed{3'99 \cdot 10^{-11} \text{ N}}$

b) 

$v_0 = 1'2 \cdot 10^{-5}$ m/s

$v_f = 0$

① $E_{M_0} = E_{M_f} \Rightarrow E_{c_0} + E_{p_0} = \cancel{E_{c_f}}^{0} + E_{p_f}$

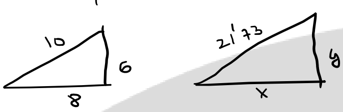
• $E_{c_0} = \frac{1}{2} \cdot m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 3(1'2 \cdot 10^{-5})^2 = 2'16 \cdot 10^{-10}$ J

• $E_{p_0} = -G \frac{Mm}{r} = -6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{20 \cdot 3}{10} = -4'002 \cdot 10^{-10}$ J

• Como $E_{c_0} + E_{p_0} = E_{p_f} \Rightarrow 2'16 \cdot 10^{-10} - 4'002 \cdot 10^{-10} = E_{p_f} \Rightarrow E_{p_f} = -1'842 \cdot 10^{-10}$ J

② $E_{p_f} = -G \frac{Mm}{r_f} \Rightarrow -1'842 \cdot 10^{-10} = -6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{20 \cdot 3}{r_f} \Rightarrow r_f = \frac{-6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 20 \cdot 3}{-1'842 \cdot 10^{-10}} = \underline{21'73 \text{ m}}$

③ Nos han pedido el punto:



$\frac{21'73}{10} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = \frac{21'73 \cdot 8}{10} = 17'35$

$\frac{21'73}{10} = \frac{y}{6} \Rightarrow y = \frac{21'73 \cdot 6}{10} = 13'04$

$\boxed{P\,(17'35\,;\,13'04) \text{ m}.}$

2022 JUNIO B.1

Marte posee la décima parte de la masa de la Tierra y la mitad de su diámetro.

a) Encuentre la relación entre las velocidades de escape de Marte y de la Tierra desde sus respectivas superficies.

b) Suponga que un objeto se lanza verticalmente desde la superficie terrestre, con una velocidad igual a la velocidad de escape de Marte. Si se desprecia el rozamiento, ¿qué altura máxima alcanzaría el objeto?

Dato: Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6 m$.

a) $M_M = \frac{M_T}{10}$

$\varnothing_M = \frac{\varnothing_T}{2} \Rightarrow r_M = \frac{r_T}{2}$

• Para sacar la velocidad de escape:

$E_{M_0} = E_{M_f}$ → Para sacar el satélite de su órbita, consideramos que lo desplazamos al infinito, por tanto $E_{M_f} = E_{M_\infty} = 0$ J

$E_{M_0} = 0 \Rightarrow E_{c_0} + E_{p_0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - G\frac{M\cancel{m}}{r} = 0$

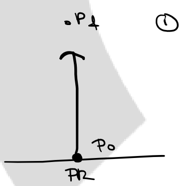
$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = G\frac{M}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{2GM}{r} \Rightarrow V_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$

• MARTE: $V_{esc_M} = \sqrt{\frac{2G M_M}{r_{0M}}}$

• TIERRA: $V_{esc_T} = \sqrt{\frac{2G M_T}{r_{0T}}}$

$\frac{V_{esc_M}}{V_{esc_T}} = \frac{\sqrt{\frac{\cancel{2G} M_M}{r_{0M}}}}{\sqrt{\frac{\cancel{2G} M_T}{r_{0T}}}} \Rightarrow \frac{V_{esc_M}}{V_{esc_T}} = \sqrt{\frac{\frac{M_M}{r_{0M}}}{\frac{M_T}{r_{0T}}}} \Rightarrow \frac{V_{esc_M}}{V_{esc_T}} = \sqrt{\frac{M_M \cdot r_{0T}}{r_{0M} \cdot M_T}}$

$\Rightarrow \frac{V_{esc_M}}{V_{esc_T}} = \sqrt{\frac{\frac{\cancel{M_T}}{10} \cdot \cancel{r_{0T}}}{\frac{\cancel{r_{0T}}}{2} \cdot \cancel{M_T}}} \Rightarrow \frac{V_{esc_M}}{V_{esc_T}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \boxed{\frac{V_{esc_M}}{V_{esc_T}} = \sqrt{\frac{1}{5}}}$

b) 

① $V_0 = V_{esc_M} = \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot V_{esc_T} \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{2GM_T}{r_T}}$

$R_T = 6'37 \cdot 10^6$ m

② $E_{M_0} = E_{M_f} \Rightarrow E_{c_0} + E_{p_0} = \cancel{E_{c_f}}^{0} + E_{p_f} \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 - G\frac{M_T \cdot \cancel{m}}{r_T} = -G\frac{M_T \cdot \cancel{m}}{r_f}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{2GM_T}{r_T}}\right)^2 - G \cdot \frac{M_T}{r_T} = -G\frac{M_T}{r_f} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2\cancel{G}\cancel{M_T}}{r_T} - \cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M_T}}{r_T} = -\cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M_T}}{r_f}$

$\Rightarrow \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{r_T} - \frac{1}{r_T} = -\frac{1}{r_f} \Rightarrow -1'26 \cdot 10^{-7} = -\frac{1}{r_f} \Rightarrow r_f = \frac{1}{1'26 \cdot 10^{-7}} = 7'94 \cdot 10^6$ m

③ $h = r - r_T = 7'94 \cdot 10^6 - 6'37 \cdot 10^6 = \boxed{1'57 \cdot 10^6 \text{ m}}$

2022 MODELO A.1

La distancia de la Tierra al Sol varía a lo largo de su órbita entre $1{,}52 \cdot 10^{11}$m en su punto más alejado (afelio) y $1{,}47 \cdot 10^{11}$ m en el punto más próximo (perihelio).

a) Calcule el trabajo realizado por el campo gravitatorio del Sol sobre la Tierra en el tránsito del afelio al perihelio.

b) Si la energía mecánica de la Tierra en su órbita vale $-2{,}65 \cdot 10^{33}$ J, ¿cuál es la velocidad máxima que alcanza la Tierra en ella?

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24} Kg$; Masa del Sol, $M_s = 1{,}99 \cdot 10^{30} Kg$

a) $r_a = 1'52 \cdot 10^{11} m$ • $W_{A\to p} = -\Delta E_p$

$r_p = 1'47 \cdot 10^{11} m$ $W_{A\to p} = -m \cdot \Delta V \Rightarrow W_{A\to p} = -m_T \cdot (V_p - V_A)$

• $V_A = -G\frac{M_s}{r_a} = -6'67\cdot10^{-11} \cdot \frac{1'99\cdot10^{30}}{1'52\cdot10^{11}} = -8'73\cdot10^{8} J/kg$

• $V_p = -G\frac{M_s}{r_p} = -6'67\cdot10^{-11} \cdot \frac{1'99\cdot10^{30}}{1'47\cdot10^{11}} = -9'03\cdot10^{8} J/kg$

$W_{A\to p} = -5'97\cdot10^{24} \cdot (-9'03\cdot10^{8} - (-8'73\cdot10^{8}))$

$\boxed{W_{A\to p} = 1'79\cdot10^{32} J}$

b) $E_M = -2'65\cdot10^{33} J$ ¿$v_{máx}$? • La velocidad es mayor en el perihelio. $r_p = 1'47\cdot10^{11} m$

• $E_{p_p} = -G\frac{Mm}{r_0} = -6'67\cdot10^{-11} \cdot \frac{1'99\cdot10^{30}\cdot5'97\cdot10^{24}}{1'47\cdot10^{11}} = -5'39\cdot10^{33} J$

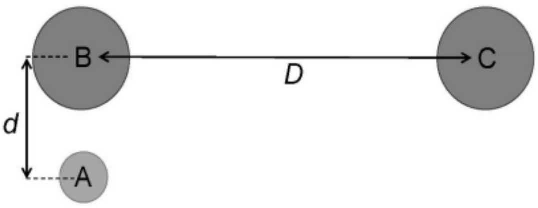
• $E_{M_p} = E_{c_p} + E_{p_p} \Rightarrow E_{c_p} = E_{M_p} - E_{p_p} = -2'65\cdot10^{33} - (-5'39\cdot10^{33}) = 2'74\cdot10^{33} J$

• $E_{c_p} = \frac{1}{2} m v_p^2 \Rightarrow 2'74\cdot10^{33} = \frac{1}{2}\cdot5'97\cdot10^{24}\cdot v_p^2 \Rightarrow v_p^2 = \frac{2'74\cdot10^{33}\cdot2}{5'97\cdot10^{24}} \Rightarrow v_p^2 = 9'18\cdot10^{8}$

$\Rightarrow v_p = \sqrt{9'18\cdot10^{8}} = \boxed{30.297'24 m/s}$

2022 MODELO B.1

En un experimento similar al efectuado por Henry Cavendish en 1798 para determinar la constante de gravitación universal, una pequeña esfera, A, de masa m queda situada ante dos esferas, B y C, ambas de la misma masa M, de tal modo que los centros de las tres esferas corresponden a los vértices de un triángulo rectángulo de catetos D y d, como se ilustra en la figura.



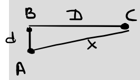
a) ¿Qué relación debe existir entre D y d para que la fuerza de atracción gravitatoria de la esfera C sobre la esfera A sea la décima parte de la atracción de la esfera B sobre A?

b) Si el valor de M es de 10 kg y se encuentra que la atracción de B sobre A es la milmillonésima parte del peso de A en la superficie terrestre, ¿cuánto vale la distancia d?

Datos: Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24} Kg$; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^{6} m$.

a) $F_{C\to A} = \frac{F_{B\to A}}{10}$ • Fuerza gravitatoria: $F = G\frac{Mm}{r^2}$ • $M_C = M_B = M$

• Distancia de C a A:



$x = \sqrt{d^2 + D^2}$

• $F_{C\to A} = G \cdot \frac{M_C \cdot m_A}{r_{CA}^2} \Rightarrow F_{C\to A} = G \cdot \frac{M \cdot m_A}{\sqrt{d^2+D^2}^2}$

• $F_{B\to A} = G \cdot \frac{M_B \cdot m_A}{r_{BA}^2} \Rightarrow F_{B\to A} = G \cdot \frac{M \cdot m_A}{d^2}$

• $\frac{F_{C\to A}}{F_{B\to A}} = \frac{\frac{\cancel{G}\cdot\cancel{M\cdot m_A}}{\sqrt{d^2+D^2}^2}}{\frac{\cancel{G}\cdot\cancel{M\cdot m_A}}{d^2}} \Rightarrow \frac{F_{C\to A}}{F_{B\to A}} = \frac{\frac{1}{d^2+D^2}}{\frac{1}{d^2}}$

$\Rightarrow \frac{\frac{\cancel{F_{B\to A}}}{10}}{\cancel{F_{B\to A}}} = \frac{d^2}{d^2+D^2} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{d^2}{d^2+D^2}$

$\Rightarrow d^2 + D^2 = 10d^2 \Rightarrow D^2 = 10d^2 - d^2 \Rightarrow D^2 = 9d^2 \Rightarrow \frac{D^2}{d^2} = 9 \Rightarrow \left(\frac{D}{d}\right)^2 = 9$

$\Rightarrow \frac{D}{d} = \sqrt{9} \Rightarrow \boxed{\frac{D}{d} = 3}$

b) $M = 10\,kg$ $\quad F_{B\to A} = \dfrac{P_A}{10^9}$

① $P_A = m \cdot g_T \Rightarrow g_T = G \cdot \dfrac{M}{r_T^2} = G \cdot \dfrac{5'97 \cdot 10^{24}}{(6'37 \cdot 10^6)^2} = 1'47 \cdot 10^{11} \cdot G \; m/s^2$

$\Rightarrow P_A = m \cdot 1'47 \cdot 10^{11} \cdot G$

② Como $F_{B\to A} = \dfrac{P_A}{10^9} \Rightarrow G \cdot \dfrac{M \cdot m}{r_{AB}^2} = \dfrac{P_A}{10^9} \Rightarrow \cancel{G} \cdot \dfrac{M \cdot \cancel{m}}{d^2} = \dfrac{\cancel{m} \cdot 1'47 \cdot 10^{11} \cancel{G}}{10^9}$

$\Rightarrow \dfrac{10}{d^2} = \dfrac{1'47 \cdot 10^{11}}{10^9} \Rightarrow \dfrac{10 \cdot 10^9}{1'47 \cdot 10^{11}} = d^2 \Rightarrow \boxed{d = 0'261\,m}$

2021 JULIO A.1

Una nave espacial ha quedado atrapada en una órbita circular en torno a un planeta esférico desconocido. Los sistemas de navegación de la nave indican que su velocidad orbital es de 25000 km $\cdot h^{-1}$ y que tarda 5 horas en dar una vuelta completa alrededor del planeta.

a) Determine el radio de la órbita circular de la nave y la masa del planeta.

b) Si la densidad del planeta es de 16150 kg m^{-3}, calcule el radio del planeta y el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie.

Dato: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$;

a) $v = 25000 \dfrac{km}{h} \cdot \dfrac{1\,h}{3600\,s} \cdot \dfrac{1000\,m}{1\,km} = 6944'44\,m/s$

$T = 5h = 18.000\,s.$

① $v = \dfrac{2\pi r}{T} \Rightarrow 6944'44 = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{18000}$

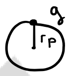
$\Rightarrow r = \dfrac{6944'44 \cdot 18.000}{2\pi} = \boxed{1'99 \cdot 10^7\,m}$

② $F_c = F_G \Rightarrow \dfrac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = G \cdot \dfrac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} \Rightarrow v^2 = G \cdot \dfrac{M}{r} \Rightarrow \dfrac{v^2 \cdot r}{G} = M \rightarrow M = \dfrac{(6944'44)^2 \cdot 1'99 \cdot 10^7}{6'67 \cdot 10^{-11}}$

$\Rightarrow \boxed{M = 1'44 \cdot 10^{25}\,Kg}$

b) $d = 16150\,kg/m^3$

① $d = \dfrac{m}{V} \Rightarrow 16150 = \dfrac{1'44 \cdot 10^{25}}{V} \Rightarrow V = \dfrac{1'44 \cdot 10^{25}}{16150} = 8'916 \cdot 10^{20}\,m^3$



② Como $V = \dfrac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow r^3 = \dfrac{V \cdot 3}{4\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{8'916 \cdot 10^{20} \cdot 3}{4\pi}} = \boxed{5'97 \cdot 10^6\,m}$

③ $P = F_G \Rightarrow \cancel{m} \cdot g = G \cdot \dfrac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} \rightarrow g = G \cdot \dfrac{M}{r^2} \Rightarrow g = 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \dfrac{1'44 \cdot 10^{25}}{(5'97 \cdot 10^6)^2} \Rightarrow \boxed{g = 26'95\,m/s^2}$

2021 JULIO B.1

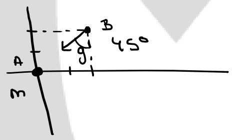
Una partícula de masa m se encuentra en el origen de coordenadas de un sistema de referencia (x, y). La componente x del campo gravitatorio creado por la partícula en el punto (2, 2) m es $-1{,}18 \cdot 10^{-11} N \cdot Kg^{-1}$.

a) Calcule el valor de la masa m.

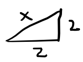
b) ¿Cuál es el trabajo que realiza el campo para llevar una partícula de masa M = 5 kg desde el punto (4, 0) m al punto (2, 2) m?

Dato: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

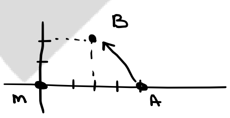
a) $g_x = -1'18 \cdot 10^{-11}\,N/kg$



$\Rightarrow \bullet\; g_x = g \cdot \cos\alpha \Rightarrow g = \dfrac{g_x}{\cos\alpha} = \dfrac{-1'18 \cdot 10^{-11}}{\cos 45^\circ} = -1'67 \cdot 10^{-11}\,m/s^2$

- $g = -1'67 \cdot 10^{-11}\,N/kg$ $\quad$ Como $P = F_G \Rightarrow \cancel{m} \cdot g = G \dfrac{M \cancel{m}}{r^2} \Rightarrow g = G \cdot \dfrac{M}{r^2}$
- Distancia entre A y B:  $x = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$
- $1'67 \cdot 10^{-11} = 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \dfrac{m}{\sqrt{8}^2} \Rightarrow m = \dfrac{1'67 \cdot 10^{-11} \cdot 8}{6'67 \cdot 10^{-11}} = \boxed{2\;kg}$

b)



- $W_{A\to B} = -\Delta E_p \rightarrow$ voy a utilizar ~~esta~~.

$W_{A\to B} = -m \cdot \Delta V$

- $W_{A\to B} = -\Delta E_p = -(E_{pB} - E_{pA})$

$E_{pA} = -G \cdot \dfrac{M \cdot m}{r} = -6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \dfrac{2 \cdot 5}{4} = -1'66 \cdot 10^{-11}\,J$

$E_{pB} = -6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \dfrac{2 \cdot 5}{\sqrt{8}} = 2'35 \cdot 10^{-11}\,J$

$W_{A\to B} = -\left(-2'35 \cdot 10^{-11} - (-1'66 \cdot 10^{-11})\right)$

$\boxed{W_{A\to B} = 6'9 \cdot 10^{-12}\,J}$

2021 JUNIO COINCIDENTES A.1

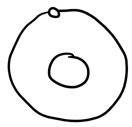
Consideremos un sistema completamente aislado formado por una bola de 6 kg de masa y un perdigón de 0,35 g. Si dicho perdigón describe una trayectoria circular de radio 2,5 m en torno a la bola y únicamente se considera la interacción gravitatoria entre ambas partículas, calcule:

a) El periodo de revolución del perdigón alrededor de la bola.

b) La energía extra mínima que habría que suministrar al perdigón para que escape del campo gravitatorio de la bola.

Dato: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

a)



$M = 6 kg$

$m = 0'35 g = 0'35 \cdot 10^{-3} kg$

$r = 2'5 m$

- $F_c = F_G \Rightarrow \frac{\cancel{m} v^2}{\cancel{r}} = G \cdot \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M}{r}$

$\Rightarrow v = \sqrt{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6}{2'5}} = 1'27 \cdot 10^{-5} m/s$

- $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 2'5}{1'27 \cdot 10^{-5}} = \boxed{1'24 \cdot 10^6 s}$

b) La energía mínima para que escape del campo se considera cuando se lleva al infinito. La $E_{M\infty} = 0 J$.

- $E_{SUMINISTRADA} = \Delta E_M \Rightarrow E_{SUM} = \cancel{E_{M f}}^{0} - E_{Mo}$

- $E_{SUM} = -(E_{co} + E_{po}) = -\left(\frac{1}{2} m v^2 - G \cdot \frac{M \cdot m}{r_o}\right)$ Como $v^2 = G \cdot \frac{M}{r}$

$E_{SUM} = -\left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot G\frac{M}{r} - G\frac{Mm}{r}\right) = -\left(-\frac{1}{2} \cdot G\frac{Mm}{r}\right) \Rightarrow E_{SUM} = G \cdot \frac{Mm}{2r}$

$\Rightarrow E_{SUM} = 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 0'35 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2'5} = \boxed{2'8 \cdot 10^{-14} J}$

2021 JUNIO COINCIDENTES B.1

Michael Mayor y Didier Queloz son dos planetólogos suizos, que en 2019 recibieron el premio Nobel de Física por descubrir el primer exoplaneta que orbitaba en torno a una estrella similar al Sol. Este exoplaneta, 51 Pegasus b, tiene una masa 51 veces mayor que Júpiter, y describe una órbita de radio 100 veces menor que la de Júpiter. Sabiendo que el periodo de revolución de Júpiter es de 12 años, mientras que el de 51 Pegasus b, es de 4 días y considerando ambas órbitas como circulares, calcule:

a) La masa de la estrella en torno a la que orbita el exoplaneta 51 Pegasus b.

b) La energía mecánica de 51 Pegasus b.

Datos: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; Masa del Sol, $M_s = 1{,}99 \cdot 10^{30} Kg$; Masa de Júpiter $M_J = 1{,}90 \cdot 10^{27} Kg$

a) $M_P = 51 M_J$

$R = \frac{R_J}{100}$

$T_J = 12$ años

$T_P = 4$ días

PEGASUS

JÚPITER

① Tercera Ley de Kepler:

$F_c = F_G \Rightarrow \frac{\cancel{m} v^2}{\cancel{r}} = G \cdot \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v^2 = G \cdot \frac{M}{r}$. Como $v = \frac{2\pi r}{T}$

$\Rightarrow \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = G \cdot \frac{M}{r} \Rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M}{r} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} K$

- Por tanto $\frac{R_J^3}{T_J^2} = G \cdot \frac{M_{sol}}{4\pi^2}$ $\left\{ \begin{array}{l} J = 378.432.000 s \\ T_P = 345.600 s. \\ R_J = 100 R \end{array} \right.$

② $R_J = \sqrt[3]{\frac{G \cdot 1'99 \cdot 10^{30} \cdot (378.432.000)^2}{4\pi^2}} = 7'84 \cdot 10^{11} m$

③ $\left. \begin{array}{l} M_P = 51 \cdot 1'9 \cdot 10^{27} = 9'69 \cdot 10^{28} Kg \\ R_P = \frac{7'84 \cdot 10^{11}}{100} = 7'84 \cdot 10^9 m \end{array} \right\}$ $\frac{R_J^3}{T_J^2} = G \cdot \frac{M}{4\pi^2} \Rightarrow M = \frac{R_J^3 \cdot 4\pi^2}{T_J^2 \cdot G} = \frac{(7'84 \cdot 10^{11})^3 \cdot 4\pi^2}{(378.432.000)^2 \cdot 6'67 \cdot 10^{-11}}$

$$\boxed{M = 1'99 \cdot 10^{30} kg}$$

b) $E_M = E_c + E_p$

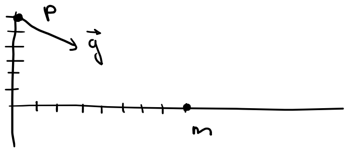
- $E_c = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$ como $v^2 = G\frac{M}{r}$ (obtenido en el apartado anterior) $\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m G\frac{M}{r}$

- $E_p = -G\frac{Mm}{r}$

Por tanto, $E_M = \frac{1}{2} G\frac{Mm}{r} - G\frac{Mm}{r} \Rightarrow E_M = -\frac{1}{2}\cdot G\frac{M}{r} = -\frac{6'67\cdot 10^{-11}\cdot 1'99\cdot 10^{30}}{2\cdot 7'84\cdot 10^{9}} = \boxed{-8'47\cdot 10^{9}\,J}$

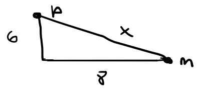
2021 JUNIO A.1
Una masa puntual de 50 g se encuentra situada en la posición (8, 0) m del plano xy. Calcule:
a) El potencial gravitatorio y el campo gravitatorio en el punto (0, 6) m del plano debido a dicha masa.
b) El trabajo realizado por el campo al trasladar un objeto puntual de 20 g desde el punto (0, 6) m hasta el origen de coordenadas.
Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot 10^{-11} N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$

a) $m = 0'05\,kg$



• Potencial gravitatorio: $V = \frac{E_p}{m} \Rightarrow V = -G\frac{M}{r}$

• Distancia entre m y P:



$x = \sqrt{8^2+6^2} = 10\,m.$

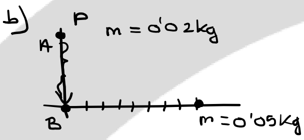
• $V = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot \frac{0'05}{10} = \boxed{-3'335\cdot 10^{-13}\,J/kg}$

• Campo gravitatorio: $\vec{P} = \vec{F}_G \Rightarrow \cancel{m}\cdot\vec{g} = -G\frac{M\cancel{m}}{r^2}\vec{u} \Rightarrow \vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\cdot\vec{u}$

• $\vec{g} = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{0'05}{10^2}\cdot\left(\frac{-8}{10}, \frac{6}{10}\right) = \left(2'67\cdot 10^{-14}, -2\cdot 10^{-14}\right)\,m/s^2$

$|\vec{g}| = \sqrt{(2'67\cdot 10^{-14})^2 + (-2\cdot 10^{-14})^2} = \boxed{3'34\cdot 10^{-14}\,m/s^2}$

b)



$m = 0'02\,kg$

• $W_{A\to B} = -m\cdot\Delta V = -m\cdot(V_B - V_A)$

• $V_A = -3'335\cdot 10^{-13}\,J/kg$

• $V_B = -G\frac{M}{r_B} = -6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{0'05}{8} = -4'17\cdot 10^{-13}\,J/kg$

• $W_{A\to B} = -0'02\cdot(-4'17\cdot 10^{-13} - (-3'335\cdot 10^{-13})) = \boxed{1'67\cdot 10^{-15}\,J}$

2021 JUNIO B.1
Una sonda espacial de 3500 kg se encuentra en órbita circular alrededor de Saturno, realizando una revolución cada 36 horas. Calcule:
a) La velocidad orbital y la energía mecánica que posee la sonda espacial.
b) La energía mínima necesaria que habría que suministrarle para que abandone el campo gravitatorio del planeta.
Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot 10^{-11} N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$; Masa de Saturno, $M_s = 5{,}68\cdot 10^{26} Kg$

a) $m = 3500\,kg$

$T = 36\,h = 129600\,s$

① $F_c = F_G \Rightarrow \frac{\cancel{m}v^2}{\cancel{r}} = G\frac{M\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r}$

② Como $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow r = \frac{v\cdot T}{2\pi}$

③ $v^2 = G\cdot\frac{M}{\frac{v\cdot T}{2\pi}} \Rightarrow v^2 = G\cdot\frac{M\cdot 2\pi}{v\cdot T} \Rightarrow v^3 = G\cdot\frac{M\cdot 2\pi}{T} \Rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot 2\pi}{T}}$

$\Rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{6'67\cdot 10^{-11}\cdot 5'68\cdot 10^{26}\cdot 2\pi}{129.600}} = \boxed{5684'38\,m/s}$

④ $E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r^2}$

Como $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow 5684'38 = \frac{2\pi r}{129600} \Rightarrow r = \frac{5684'38\cdot 129600}{2\pi} = 1'17\cdot 10^{8}\,m$

$E_M = \frac{1}{2}\cdot 3500\cdot(5684'38)^2 - 6'67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5'68\cdot 10^{26}\cdot 3500}{(1'17\cdot 10^{8})^2} = \boxed{5'65\cdot 10^{10}\,J}$

2021 MODELO A.1
El Sol orbita alrededor del centro galáctico siguiendo una órbita circular de radio $2{,}4\cdot 10^{17}$ km y periodo de 203 millones de años. Determine:
a) La velocidad orbital del Sol alrededor del centro galáctico.
b) La masa del centro galáctico suponiendo que toda la masa se concentra en un agujero negro en su centro.
Dato: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot 10^{-11} N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$

a) $r = 2'4\cdot 10^{20}\,m$

• $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot 2'4\cdot 10^{20}}{6'4\cdot 10^{15}} = \boxed{2'36\cdot 10^{5}\,m/s}$

$T = 203.000.000 \text{ años} = 6'4 \cdot 10^{15}\,s$

b) $F_c = F_G \Rightarrow \dfrac{\cancel{m} v^2}{\cancel{r}} = G\dfrac{M\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \Rightarrow v^2 = G\dfrac{M}{r} \Rightarrow M = \dfrac{v^2 \cdot r}{G} = \dfrac{(2'36\cdot 10^5)^2 \cdot 2'4\cdot 10^{20}}{6'67\cdot 10^{-11}}$

$$\boxed{M = 2\cdot 10^{41}\ kg}$$

2021 MODELO B.1

Un planeta esférico tiene una masa igual a 360 veces la masa de la Tierra, y la velocidad de escape para objetos situados cerca de su superficie es 6 veces la velocidad de escape terrestre. Determine:

a) La relación entre los radios del planeta y de la Tierra.

b) La relación entre las aceleraciones de la gravedad en puntos de la superficie del planeta y de la Tierra.

a) $m_P = 360\, m_T$

$v_{esc.P} = 6\, v_{esc\,T}$

① Sacamos la velocidad de escape: $E_{M_0} = E_{M_f} \Rightarrow E_{M_0} = E_{M_\infty}^{\;0}$

$\Rightarrow E_{M_0} = 0 \Rightarrow E_{c_0} + E_{p_0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 - G\dfrac{Mm}{r^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m} v^2 = G\dfrac{M\cancel{m}}{r^2} \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\dfrac{2GM}{r^2}}$

② PLANETA $\Rightarrow v_{esc\,P} = \sqrt{\dfrac{2GM_P}{r_P^2}}$

TIERRA $\Rightarrow v_{esc\,T} = \sqrt{\dfrac{2\,G\,M_T}{r_T^2}}$

$\dfrac{6\cancel{v_{esc}}_T}{\cancel{v_{esc}}_T} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\cancel{2G}\cdot 360\cancel{M_T}}{r_P^2}}}{\sqrt{\dfrac{\cancel{2G}\cdot\cancel{M_T}}{r_T^2}}} \Rightarrow 6^2 = \dfrac{\dfrac{360}{r_P^2}}{\dfrac{1}{r_T^2}} \Rightarrow 36 = \dfrac{360\, r_T^2}{r_P^2}$

$\Rightarrow 36\, r_P^2 = 360\, r_T^2 \Rightarrow \dfrac{r_P^2}{r_T^2} = \dfrac{360}{36} \Rightarrow \left(\dfrac{r_P}{r_T}\right)^2 = 10 \Rightarrow \boxed{\dfrac{r_P}{r_T} = \sqrt{10}}$

b) Aceleración de la gravedad: $P = F_G \rightarrow \cancel{m}\cdot g = G\dfrac{M\cancel{m}}{r^2} \Rightarrow g = G\dfrac{M}{r^2}$

PLANETA $\Rightarrow g_P = G\cdot\dfrac{M_P}{r_P^2}$

TIERRA $\Rightarrow g_T = G\cdot\dfrac{M_T}{r_T^2}$

$\dfrac{g_P}{g_T} = \dfrac{\cancel{G}\cdot\dfrac{360\cdot\cancel{M_T}}{r_P^2}}{\cancel{G}\cdot\dfrac{\cancel{M_T}}{r_T^2}} \Rightarrow \dfrac{g_P}{g_T} = \dfrac{\dfrac{360}{r_P^2}}{\dfrac{1}{r_T^2}} \Rightarrow \dfrac{g_P}{g_T} = \dfrac{360\, r_T^2}{r_P^2}$

• Como $r_P = \sqrt{10}\, r_T \Rightarrow \dfrac{g_P}{g_T} = \dfrac{360\cdot r_T^2}{(\sqrt{10}\, r_T)^2} \Rightarrow \dfrac{g_P}{g_T} = \dfrac{360}{10} \Rightarrow \boxed{\dfrac{g_P}{g_T} = 36}$

2020 SEPTIEMBRE A.1

Calisto (el tercer satélite con mayor masa del sistema solar), que posee una densidad de 1,83 g cm-3 y un radio de 2410 km, da una revolución alrededor del planeta Júpiter cada 16,89 días.

a) Calcule la masa del satélite y la aceleración de la gravedad en su superficie.

b) Obtenga la energía cinética y la energía mecánica de Calisto en su órbita circular alrededor del planeta.

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6{,}67\cdot 10^{-11} N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$; Masa de Júpiter, $M_J = 1{,}90\cdot 10^{27} Kg$

a) $d_{CALISTO} = \dfrac{1'83\,g}{cm^3}\cdot\dfrac{1\,kg}{1000\,g}\cdot\dfrac{10^6\,cm^3}{1\,m^3} = 1830\ kg/m^3$

$r_{CALISTO} = 2'41\cdot 10^6\,m$

$T_{CALISTO} = 16'89\ \text{días} = 1.459.296\ s.$

① $d = \dfrac{m}{V}$ donde $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

② $V = \dfrac{4\pi\cdot(2'41\cdot 10^6)^3}{3} = 5'86\cdot 10^{19}\ m^3$

③ $d = \dfrac{m}{V} \Rightarrow m = d\cdot V = 1830\cdot 5'86\cdot 10^{19} = \boxed{1'07\cdot 10^{23}\ Kg}$

④ $g = G\cdot\dfrac{M}{r^2} \Rightarrow g = 6'67\cdot 10^{-11}\cdot\dfrac{1'07\cdot 10^{23}}{(2'41\cdot 10^6)^2} \Rightarrow \boxed{g = 1'23\ m/s^2}$

b)

• $E_c = \frac{1}{2} m\cdot v^2$

① $F_c = F_G \Rightarrow \dfrac{mv^2}{r} = G\dfrac{Mm}{r^2} \Rightarrow v^2 = G\cdot\dfrac{M}{r}$

② Como $v = \dfrac{2\pi r}{T} \Rightarrow \left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^2 = G\cdot\dfrac{M}{r} \Rightarrow \dfrac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\cdot\dfrac{M}{r} \rightarrow r^3 = \dfrac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}$

$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}} \rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{6'67\cdot 10^{-11}\cdot 1'9\cdot 10^{27}\cdot(1.459.296)^2}{4\pi^2}} = 1'9\cdot 10^9\ m$

③ $v = \frac{2\pi \cdot 1'9 \cdot 10^9}{1.459.296} = 8180'69\ m/s$ ④ $E_c = \frac{1}{2} \cdot 1'07 \cdot 10^{23} \cdot (8180'69)^2 = \boxed{3'58 \cdot 10^{30}\ J}$

⑤ $E_M = E_c + E_p \Rightarrow E_M = 3'58 \cdot 10^{30} - G\frac{Mm}{r} = 3'58 \cdot 10^{30} - 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1'9 \cdot 10^{27} \cdot 1'07 \cdot 10^{23}}{1'9 \cdot 10^9} = \boxed{-3'56 \cdot 10^{30}\ J}$

2020 SEPTIEMBRE B.1
La sonda espacial Mars Reconnaissance Orbiter consiguió en septiembre de 2006 situarse en una órbita circular en torno al planeta Marte a 290 km de altura sobre la superficie para realizar un mapeo de su superficie. Tras utilizar combustible en la maniobra de aproximación, la sonda actualmente tiene una masa de 1031 kg.
a) Halle el periodo de revolución de la sonda espacial y su velocidad orbital alrededor de Marte.
b) Obtenga la energía mínima necesaria que habría que suministrar al satélite para que escape del campo gravitatorio marciano.
Datos: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; Masa de Marte, $M_{MARTE} = 6{,}42 \cdot 10^{23} Kg$, Radio de Marte, $R_{MARTE} = 3{,}39 \cdot 10^6 m$

a) $h = 290 km = 2'9 \cdot 10^5 m$

$m = 1031\ kg$

$r_{ORBITAL} = r_M + h = 3'39 \cdot 10^6 + 2'9 \cdot 10^5 = 3'68 \cdot 10^6 m$

① $F_c = F_G \Rightarrow \frac{m v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r}$

• Como $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = G\frac{M}{r}$

$\Rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M}{r} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (3'68 \cdot 10^6)^3}{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 6'42 \cdot 10^{23}}} = \boxed{6778'31\ s.}$

② $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow v = \frac{2\pi \cdot 3'68 \cdot 10^6}{6778'31} = \boxed{3411'19\ m/s}$

b) La energía que hay que suministrar es la diferencia de energía entre el punto inicial y el infinito:

• $\Delta E_M = \cancel{E_{M\infty}}^{0} - E_{M0}$

• $E_{M0} = E_{c0} + E_{p0} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} \cdot 1031 \cdot 3411'19^2 - 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6'42 \cdot 10^{23} \cdot 1031}{3'68 \cdot 10^6} = -6 \cdot 10^9 J$

• $\Delta E_M = -E_{M0} = -(-6 \cdot 10^9) = \boxed{6 \cdot 10^9 J}$

2020 JULIO COINCIDENTE A.1
En un capítulo de la serie de ficción Stargate, los protagonistas llegan a un planeta desconocido. La información recabada por nuestros protagonistas antes de su llegada les ha permitido deducir que la masa de este planeta es la misma que la de la Tierra. Sin embargo, no han podido calcular su radio. Para ello, el físico del equipo de investigación con la ayuda de un péndulo simple, establece que la relación entre la gravedad en la superficie de la Tierra, g_T, y la del planeta, g_P, es $g_P = 2g_T$. Calcule:
a) El radio de dicho planeta.
b) La velocidad de escape desde la superficie del planeta.
Datos: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; Radio de la Tierra, R_T = 6370 km; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24} Kg$

a) $g_P = 2g_T$

$m_P = m_T$

• Campo gravitatorio, $P = F_G \Rightarrow \cancel{m} \cdot g = G\frac{M\cancel{m}}{r^2} \Rightarrow g = G\frac{M}{r^2}$

• PLANETA: $g_P = G\frac{M_P}{r_P^2}$

• TIERRA: $g_T = G\frac{M_T}{r_T^2}$

$\frac{g_P}{g_T} = \frac{\cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M_P}}{r_P^2}}{\cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M_T}}{r_T^2}} \Rightarrow \frac{2\cancel{g_T}}{\cancel{g_T}} = \frac{r_T^2}{r_P^2}$

$\Rightarrow 2 = \frac{(6'37 \cdot 10^6)^2}{r_P^2} \Rightarrow r_P^2 = \frac{(6'37 \cdot 10^6)^2}{2} \Rightarrow r_P = \sqrt{\frac{(6'37 \cdot 10^6)^2}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{r_P = 4'5 \cdot 10^6 m}$

b) $E_{M0} = \cancel{E_{M\infty}}^{0} \Rightarrow E_{M0} = 0 \Rightarrow E_{c0} + E_{p0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - G\frac{M\cancel{m}}{r} = 0 \Rightarrow v^2 = 2G\frac{M}{r}$

$\Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_P}{r_P}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 5'97 \cdot 10^{24}}{4'5 \cdot 10^6}} = \boxed{13.303'28\ m/s}$

2020 JULIO COINCIDENTE B.1
Un satélite de 6000 kg de masa describe una órbita circular de radio $6{,}97 \cdot 10^6$m alrededor de la Tierra. Si su periodo de revolución es de 96,5 minutos, calcule:

a) La constante de gravitación universal G.
b) La energía del satélite en dicha órbita.
Dato: Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24} Kg$

a) $m = 6000\,kg$ ① $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 6'97 \cdot 10^6}{5790} = 7563'7\,m/s$

$r = 6'97 \cdot 10^6\,m$

$T = 96'5\,min = 5790\,s$ ② $F_c = F_G \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = G \cdot \frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r} \Rightarrow G = \frac{v^2 \cdot r}{M} = \frac{7563'7^2 \cdot 6'97 \cdot 10^6}{5'97 \cdot 10^{24}}$

$\Rightarrow \boxed{G = 6'67 \cdot 10^{-11}\,N\,m^2/kg^2}$

b) $E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} \cdot 6000 \cdot 7563'7^2 - 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5'97 \cdot 10^{24} \cdot 6000}{6'97 \cdot 10^6} = \boxed{-1'71 \cdot 10^{11}\,J}$

2020 JULIO A.1
Un satélite sigue una órbita circular sincrónica (es decir, del mismo periodo que el de rotación del planeta) de radio $1{,}59 \cdot 10^5$km en torno a un planeta de masa $1{,}90 \cdot 10^{27}$kg. Calcule:
a) La velocidad del satélite en la órbita
b) El periodo de rotación del planeta sobre su eje.
Dato: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

a) $r = 1'59 \cdot 10^8\,m$ ① $F_c = F_G \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}}$

$M_p = 1'9 \cdot 10^{27}\,kg$

$\Rightarrow v = \sqrt{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1'9 \cdot 10^{27}}{1'59 \cdot 10^8}} = \boxed{28.231'97\,m/s}$

b) Como $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T_{satélite} = \frac{2\pi \cdot 1'59 \cdot 10^8}{28\,231'97} = 35.386'35\,s.$

Como $T_{PLANETA} = T_{SATÉLITE} \Rightarrow \boxed{T_p = 35.386'35\,s.}$

2020 JULIO B.1
Se tiene un planeta de masa $1{,}95 \cdot 10^{25}$kg y radio 5500 km. Determine:
a) El módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta.
b) La velocidad de escape desde la superficie del planeta.
Dato: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

a) $m = 1'95 \cdot 10^{25}\,kg$ ① Aceleración de la gravedad: $P = F_G \Rightarrow m \cdot g = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow g = G\frac{M}{r^2}$

$r_p = 5'5 \cdot 10^6\,m.$

$g = 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1'95 \cdot 10^{25}}{(5'5 \cdot 10^6)^2} = \boxed{43\,m/s^2}$

b) $E_{M_0} = E_{M_\infty}^{\,0} \Rightarrow E_{M_0} = 0 \Rightarrow E_{c_0} + E_{p_0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - G\frac{M\cancel{m}}{r} = 0 \Rightarrow v^2 = 2G\frac{M}{r}$

$\Rightarrow v_{esc} = \sqrt{2G\frac{M_p}{r_p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 1'95 \cdot 10^{25}}{5'5 \cdot 10^6}} = \boxed{21.747'73\,m/s}$

2020 MODELO A.1
El satélite UARS se puso en órbita en 1991 para estudiar la entrada y salida de energía en la atmósfera superior. Su masa era de 5800 kg y realizaba 15 órbitas diarias. En 2005, el satélite se quedó sin combustible y dejó de operar. Calcule:
a) La altura sobre la superficie de la Tierra de dicho satélite cuando estaba en órbita.
b) La energía total del satélite cuando estaba en órbita.
Datos: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$; Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24} Kg$; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6 m.$

a) $m = 5800\,kg$

$\frac{15\text{ vueltas}}{1\text{ día}} = \frac{1\text{ vuelta}}{x\text{ días}} \Rightarrow T = \frac{1 \cdot 1}{15} = 0'067\text{ días} = 5760\,s.$

① $F_c = F_G \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r}$ ② como $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = G \cdot \frac{M}{r}$

$\Rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r} \Rightarrow r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 5'97 \cdot 10^{24} \cdot (5760)^2}{4\pi^2}} = 6'94 \cdot 10^6\,m$

- $r = r_P + h \Rightarrow h = r - r_P = 6{,}94 \cdot 10^6 - 6{,}37 \cdot 10^6 = \boxed{5{,}7 \cdot 10^5\ m}$

b) $E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{r}$ como $v^2 = G\frac{M}{r}$ (sacado en el apartado anterior)

$$\Rightarrow E_M = \frac{1}{2} m \cdot G\frac{M}{r} - G\frac{Mm}{r} \Rightarrow E_M = -\frac{1}{2} \cdot G\frac{Mm}{r} = -\frac{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 5'97 \cdot 10^{24} \cdot 5800}{2 \cdot 6'94 \cdot 10^6} = \boxed{-1'66 \cdot 10^{11}\ J}$$

2020 MODELO B.1

Unos astrónomos han descubierto un nuevo sistema solar, formado por una estrella de masa $6{,}0 \cdot 10^{30}$kg, que desempeña el papel del sol, y un planeta que gira en torno a ella en una órbita circular, tardando 3 años terrestres en dar una vuelta completa.

a) Determine la distancia a la que se encuentra el planeta del sol.

b) Si en la superficie del planeta la aceleración de la gravedad es $15\ m \cdot s^{-2}$ y la velocidad de escape es de $11{,}2\ km \cdot s^{-1}$, ¿cuánto valen la masa y el radio del planeta?

Dato: Constante de Gravitación Universal, G = $6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

a) $M_E = 6 \cdot 10^{30}\ Kg$

$T = 3\ años = 94608000\ s$

① $F_c = F_G \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v^2 = G\frac{M}{r}$

② como $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = G\frac{M}{r} \Rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M}{r} \Rightarrow r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{30} \cdot (94608000)^2}{4\pi^2}} \Rightarrow \boxed{r = 4'49 \cdot 10^{11}\ m}$$

b) P $g = 15\ m/s^2$

$v_{esc} = 11'2\ km/s = 11.200\ m/s$

① Campo gravitatorio: $P = F_G \Rightarrow m \cdot g = G\frac{M}{r^2} \Rightarrow g = G\frac{M}{r^2}$

$\Rightarrow 15 = G \cdot \frac{M_P}{r_P^2}$

② $E_{M0} = E_{M\infty} = 0 \Rightarrow E_{C0} + E_{P0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - G\frac{M\cancel{m}}{r} = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{2GM}{r} \Rightarrow v_{esc}^2 = \frac{2GM}{r}$

$\Rightarrow 11.200^2 = 2 \cdot G \cdot \frac{M_P}{r_P}$

③ Hacemos un sistema:

$$\begin{cases} 15 = G \cdot \frac{M_P}{r_P^2} \\ 11200^2 = 2 \cdot G \cdot \frac{M_P}{r_P} \end{cases}$$

$M_P = \frac{15 r_P^2}{G}$

$\downarrow$

$11200^2 = 2 \cdot G \cdot \frac{\frac{15 r_P^2}{G}}{r_P} \Rightarrow 11200^2 = 2 \cdot \cancel{G} \frac{15 r_P^{\cancel{2}}}{\cancel{r_P} \cdot \cancel{G}}$

$\Rightarrow 11200^2 = 2 \cdot 15 \cdot r_P \Rightarrow \boxed{r_P = 4{,}18 \cdot 10^6\ m}$

$$M_P = \frac{15 \cdot (4{,}18 \cdot 10^6)^2}{6'67 \cdot 10^{-11}} = \boxed{3{,}93 \cdot 10^{24}\ Kg}$$