

2023 MODELO A.1 (2 puntos)

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcule A^{-1} para $a = 1$.

a) La matriz es invertible cuando $|A| \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + a - a + a + a = a^2 + 2a + 1 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 0 \quad (a+1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

• Si $a \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0$ y A es invertible

• Si $a = -1 \Rightarrow |A| = 0$ y A no es invertible

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ① $|A| = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 3$ ② $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ③ $\text{Adj } A^t = \begin{pmatrix} 2 & +2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\textcircled{4} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^t = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

2023 MODELO B.1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay = a \\ ax + y + az = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a .

b) Resuelva el sistema para $a = 2$.

a) $M^* = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & a \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = 1 + 0 + 0 - 0 - a^2 - 0 = -a^2 + 1 \Rightarrow -a^2 + 1 = 0$
 $\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \rightarrow \begin{matrix} a=1 \\ a=-1 \end{matrix}$

• Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow r(M) = 3 \Rightarrow r(M^*) = 3$ y n° incógnitas = 3

Como $r(M^*) = r(M) = n^\circ$ incógnitas seña **Sistema compatible determinado.**

• Si $a = -1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(M^*) = 2 \\ r(M) = 2 \\ n^\circ \text{ incóg} = 3 \end{matrix} \end{array} \right\} \quad \begin{matrix} r(M^*) = r(M) \neq n^\circ \text{ incóg.} \\ \text{SISTEMA COMPATIBLE} \\ \text{INDETERMINADO} \end{matrix}$$

• Si $a = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(M^*) = 3 \\ r(M) = 2 \end{matrix} \end{array} \right\} \quad \begin{matrix} r(M^*) \neq r(M) \\ \text{SISTEMA INCOMPATIBLE} \end{matrix}$$

2022 JUNIO COINCIDENTE A.1 (2 puntos)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$YB = A + aI$, donde I es la matriz identidad de orden 3 y a es un número real.

a) Calcule $A(A^2 - A^4)$.

b) Calcule los valores de a para que las matrices B y AB sean invertibles.

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{por tanto } A^4 = A^3 \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $A \cdot (A^2 - A^4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow A \cdot (A^2 - A^4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

b) $B = A + aI$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Para que sea invertible } |B| \neq 0$$

 $|B| = a^3 - a \Rightarrow a^3 - a = 0$
 $\Rightarrow$



La matriz B tendrá inversa cuando
 $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$

$$a(a^2-1)=0 \rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ a^2=1 \\ a=\pm 1 \end{matrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Para que sea invertible $|A \cdot B| \neq 0$ $|A \cdot B| = 0$

El $|A \cdot B|$ siempre es 0.
No tiene inversa para cualquier valor de a .

2022 JUNIO B.1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2ax + z = 1 \\ ax - y + z = 0 \\ ay + z = a + 1 \end{cases}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a .

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 1 & 1 \\ a & -1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -2a + a^2 - 2a^2 = -a^2 - 2a$$

$$-a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(-a-2) = 0$$

$$a = 0 \text{ y } a = -2$$

• Si $a \neq 0$ y $a \neq -2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3, \Rightarrow r(A^*) = 3$ n° incógnitas = 3

$$r(A) = r(A^*) = \text{n° incógnitas}$$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

• si $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 2$$

$$r(A^*) = 2$$

$$\text{n° incógnitas} = 3$$

$r(A) = r(A^*) \neq \text{n° incógnitas}$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

• si $a \neq -2$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_2 - F_1} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 2 \quad r(A^*) = 3$$

SISTEMA INCOMPATIBLE

b) Para $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -y + z = 0 \\ -y + 1 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} z = 1 \\ y = 1 \\ x = \lambda \end{matrix}$$

2022 JUNIO A.1 (2 puntos)

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcule A^{-1} para $a = 1$.

a) La matriz A tiene inversa si $|A| \neq 0$. $|A| = -2 + a^2 - 2a = a^2 - 2a - 2 \Rightarrow a^2 - 2a - 2 = 0$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

La matriz tiene inversa si $a \neq 1 \pm \sqrt{3}$

b) Para $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = -2 + 1 - 2 = -3$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj } A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^t = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

2022 JUNIO B.1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = a \\ ax - y - az = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a .

b) Resuelva el sistema para $a=2$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ a & -1 & -a & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $|A| = -1 + a - a^2 + 1 - a^2 + a = -2a^2 + 2a = 0$
 $a(-2a + 2) = 0 \Rightarrow a = 0$
 $-2a = -2 \Rightarrow a = 1$

• Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$

$\Rightarrow r(A^*) = 3$; n.º incógnitas = 3 $r(A) = r(A^*) = \text{n.º incógnitas}$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

• Si $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$ $r(A^*) = 3$ $r(A) \neq r(A^*)$

SISTEMA INCOMPATIBLE

• Si $a = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1, F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$ $r(A^*) = 2$ $\text{n.º incógnitas} = 3$

$r(A) = r(A^*) \neq \text{n.º incógnitas}$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

b) Para $a = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1 - F_2, F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x + 2y + z = 2$
 $5y + 4z = 4 \Rightarrow 5 + 4z = 4 \Rightarrow 4z = -1 \Rightarrow z = -\frac{1}{4}$
 $x + 2 \cdot 1 - \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$
 $y = 1$

2022 MODELO A.1 (2 puntos)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcule, para $a = 0$, la matriz inversa A^{-1} .

a) $|A| = 2a + 1 - 1 - 4 = 2a - 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$

La matriz A tiene inversa cuando $a \neq 2$.

b) Para $a = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = -4 \quad \text{Adj } A^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Adj } A^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2022 MODELO B.1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a :

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - y + az = -1 \\ 2x + y + z = 6 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a .

b) Resuelva el sistema para $a = -2$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $|A| = -1 + 1 - 2a + 2 + 1 - a = -3a + 3$
 $-3a + 3 = 0 \Rightarrow a = 1$

• Si $a \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A^*) = 3$; n.º incógnitas = 3

$r(A) = r(A^*) = \text{n.º incógnitas}$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

• Si $a = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1, 2F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$ $r(A^*) = 3$ $r(A) \neq r(A^*)$

SISTEMA INCOMPATIBLE



b) Para $a = -2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1, 2F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{cases} x - y + z = 2 \\ -3z = -3 \\ -3y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 + 1 = 2 & \boxed{x = 2} \\ z = 1 & \\ -3y + 1 = -2 & \boxed{y = 1} \end{cases}$$

2021 JULIO COINCIDENTE A.3 (2 puntos)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3a \end{pmatrix}$.

a) Calcule los valores del parámetro real a para que A sea invertible.

b) Para $a = 1$, calcule A^{-1} .

a) Para que la matriz sea invertible, su determinante $|A| \neq 0$.

$$|A| = 6a + 6a = 12a \quad 12a = 0 \Rightarrow a = 0$$

La matriz A tendrá inversa para cualquier valor de a menos $a = 0$.

b) Para $a = 1$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $|A| = 12$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Adj } A^t = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^t = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

2021 JULIO COINCIDENTES B.1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + y - az = 0 \\ y + az = 3 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a .

b) Resuelva el sistema para $a = -2$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}$ $|A| = a + 1 - a + a = a + 1$ $a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

• Si $a \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A^*) = 3$ n.º incógnitas = 3

$r(A) = r(A^*) = \text{n.º incógnitas}$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

• Si $a = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{cases} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 3 \end{cases}$$

$r(A) \neq r(A^*)$

SISTEMA INCOMPATIBLE

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{cases} x + y + z = 9 \\ z = -9 \\ y - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 15 - 9 = 9 & \boxed{x = 33} \\ y + 18 = 3 & \boxed{y = -15} \end{cases}$

2021 JULIO A.1 (2 puntos)

Se consideran la matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para $a = 1$, calcule, si existe, la matriz X que satisface $AX = B$.

a) La matriz A tiene inversa cuando $|A| \neq 0$.

$$|A| = -2a + a - 1 = -a - 1 \Rightarrow -a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de $a \neq -1$.

b) $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad |A| = -2 \quad \text{Adj } A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{Adj } A^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2021 JULIO B.1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a :

$$\begin{cases} x + 2ay + z = 0 \\ -x - ay = 1 \\ -y - z = -a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a .

b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{pmatrix} \quad |A| = a + 1 - 2a = -a + 1 \Rightarrow a = 1$

• Si $a \neq 1 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A^*) = 3$; n° incógnitas = 3 $r(A) = r(A^*) = \text{n° incógnitas}$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

• Si $a = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 2 \\ \text{n° incógnitas} = 3 \end{matrix}$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

b) Para $a = 3$

$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + 6y + z = 0 \\ 3y + z = 1 \\ -2z = -2 \end{cases}$

$z = 1$

$3y + 1 = 1 \Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow x + 6 \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

2021 JUNIO COINCIDENTE A.1 (2 puntos)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 6 \\ 2 & a & 4 \\ 2 & a & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A no es invertible.

b) Para $a = 1$, calcule la matriz inversa A^{-1} y obtenga la matriz X tal que $AX = B$.

a) La matriz A no tiene inversa cuando $|A| = 0$. $|A| = 6a^2 + 12a + 16 - 12a - 24 - 4a^2 = 2a^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2a^2 = 8 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$

La matriz no tiene inversa para $a = 2$ y $a = -2$.

b) Para $a = 1$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad |A| = -6 \quad \text{Adj } A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -6 & -6 & 3 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{Adj } A^t = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -4 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^t \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -4 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & -1/3 \\ 2/3 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

• $AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$X = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -4 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ -20 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/6 \\ 20/6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 10/3 \\ -1 \end{pmatrix}$

2021 JUNIO A.1 (2 puntos)

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

a) Determine los valores del parámetro real a y b para los que $A = A^{-1}$.

b) Para $a = b = 2$, calcule la matriz inversa de A .

a) $A = A^{-1} \Rightarrow A = \frac{1}{|A|} \Rightarrow A^2 = I \Rightarrow A \cdot A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = I$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & 2a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 2a & 0 & a^2+1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & 2a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 2a & 0 & a^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 2a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \\ b = -1 \end{matrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad |A| = 8 - 2 = 6 \quad \text{Adj } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Adj } A^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^t \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

2021 JUNIO B.1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+y-z=-1 \\ x-y+a^2z=3 \\ 2x-y+z=4 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

b) Resuelva el sistema para $a=1$.

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad |A| = -1 + 1 + 2a^2 - 2 - 1 + a^2 = 3a^2 - 3$$

$$3a^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3a^2 = 3 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-1 \end{cases}$$

• Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A^*) = 3$ n.º incógnitas = 3

$r(A) = r(A^*) = \text{n.º incógnitas} \Rightarrow$ **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**

• si $a=1$ o $a=-1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1-F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2:2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 2, r(A^*) = 2, \text{ n.º incógnitas} = 3 \quad r(A) = r(A^*) \neq \text{n.º incógnitas} \quad \text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO}$$

b) Para $a=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x+y-z=-1 \\ -y+z=2 \end{cases} \quad \begin{cases} z=\lambda \\ -y+\lambda=2 \Rightarrow y=\lambda-2 \end{cases}$$

$$x+(\lambda-2)-\lambda=-1 \Rightarrow x-2=-1 \Rightarrow x=1$$

2021 MODELO A.1 (2 puntos)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determine los valores a , b y c para que se verifique $A^2 = A - B$.

b) Para $a=b=c=2$, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

$$a) \quad A^2 = A - B \Rightarrow A \cdot A = A - B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2b+ac & 2c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a-c & 1 & 0 \\ b-1 & c-1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a = a-c \Rightarrow a = -c \Rightarrow a=1 \\ 2c = c-1 \Rightarrow c = -1 \\ 2b+ac = b-1 \Rightarrow b+1 \cdot (-1) = -1 \Rightarrow b=0 \end{cases}$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = 1 \neq 0 \text{ si es INVERTIBLE}$$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Adj } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2021 MODELO B.2 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+y+z=2a-1 \\ 2x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

b) Resuelva el sistema para $a=0$.

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2a-1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |A| = 1 + 2a + a - 1 - 2 - a^2 = -a^2 + 3a - 2$$

$$-a^2 + 3a - 2 = 0 \quad \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0$ y $r(A) = 3 \Rightarrow r(A^*) = 3$
nº incógnitas = 3 $r(A) = r(A^*) = \text{nº incógnitas}$

SISTEMA COMPATIBLE
DETERMINADO

- si $a = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1 - F_2, F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 2 \\ \text{nº incógnitas} = 3 \end{matrix}$$

$$r(A) = r(A^*) \neq \text{nº incógnitas}$$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

- si $a = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1 - F_2, F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 3 \\ r(A) \neq r(A^*) \end{matrix}$$

SISTEMA
INCOMPATIBLE

- b) Para $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1 - F_2, F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x + y + z = -1 \\ y + 2z = -3 \\ y + z = -2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2 + 2z = -3 \\ 2z = -1 \\ z = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$x - 2 - \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow x = -1 + 2 + \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

2020 SEPTIEMBRE A.1 (2 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la igualdad $A^2 - 5A = I$, donde I es la matriz identidad.

b) Calcule A^{-1} para $a = -1$.

$$a) A \cdot A - 5A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 + 5a^2 & 25a \\ 5a & 5a^2 + 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 25a \\ 5a & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5a^2 - 6 & 0 \\ 0 & 5a^2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 5a^2 - 6 = 1 \Rightarrow 5a^2 = 7 \Rightarrow a^2 = \frac{7}{5} \quad a = \pm \sqrt{\frac{7}{5}}$$

- b) Para $a = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad |A| = 6 - 5 = 1 \Rightarrow \text{Adj } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Adj } A^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A^t \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2020 SEPTIEMBRE B.1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax - 4y - z = 2 \\ 2x + ay - z = a - 4 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a .

b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ a & -4 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{pmatrix} \quad |A| = 4 + 2a - a^2 + a = -a^2 + 3a + 4$$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm 5}{-2} \begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix}$$

- Si $a \neq 4$ y $a \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0$

$$\Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A^*) = 3; \text{ nº incógnitas} = 3 \quad r(A) = r(A^*) = \text{nº incógnitas}$$

SISTEMA COMPATIBLE
DETERMINADO

- si $a = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{4F_1 - F_2, 2F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & 1 & 2 \\ 0 & -12 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 2 \\ \text{nº incógnitas} = 3 \end{matrix}$$

$$r(A) = r(A^*) \neq \text{nº incógnitas}$$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

• Si $a = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1, 2F_1-F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 3 \end{matrix}$$

$r(A) \neq r(A^*)$
SISTEMA INCOMPATIBLE

b) Para $a = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_1-F_2, 2F_1-F_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{9F_2-5F_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x - 3y = 1 \\ -5y + z = 1 \\ 4z = -6 \end{matrix}$$

$$-5y - \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow -5y = 1 + \frac{3}{2} \Rightarrow -5y = \frac{5}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$x - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow x + \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$z = -\frac{3}{2}$$

2020 JUNIO COINCIDENTES A.1 (2 puntos)

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule A^2 y A^{10} .

b) Calcule $(A \cdot A - 3I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad 4 = 2^2$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad 8 = 2^3$

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad 16 = 2^4$

Siguiendo el proceso $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}$

b) $(A \cdot A - 3I)^{-1} \quad A \cdot A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |A \cdot A - 3I| = 4$

$\text{Adj}(A \cdot A - 3I) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Adj}(A \cdot A - 3I)^t = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$(A \cdot A - 3I)^{-1} = \frac{1}{|A \cdot A - 3I|} \cdot \text{Adj}(A \cdot A - 3I)^t = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2020 JUNIO COINCIDENTES B.1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2a \\ 2x + ay + 2z = 3 \\ -x - y - z = 2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a .

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2a \\ 2 & a & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} |A| = -3a - 2 - 4 + a + 4 + 6 \\ = -2a + 4 \end{matrix}$

• Si $a \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A^*) = 3 \quad n^{\circ} \text{ incógnitas} = 3$

$r(A) = r(A^*) = n^{\circ} \text{ incógnitas}$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

• Si $a = 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_3+F_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 3 \end{matrix}$$

$r(A) \neq r(A^*)$
SISTEMA INCOMPATIBLE

b) Para $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3F_3 + F_1]{2F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ -2y = 7 \\ -y - 2z = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} - 2z = 6 \\ 2z = \frac{7}{2} - 6 \\ 2z = -\frac{5}{2} \\ z = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$3x + 2 \cdot \frac{-7}{2} + \left(\frac{-5}{4}\right) = 0 \quad 3x - 5 - \frac{5}{4} = 0 \quad 3x = \frac{17}{4} \Rightarrow x = \frac{17}{12}$$

2020 JUNIO A.1 (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + ay = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x + ay + (a+1)z = a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

b) Resuelva el sistema para $a = 0$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{pmatrix} \quad |A| = 2a - a(a+1) - 2a = -a(a+1)$
 $-a \cdot (a+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ a+1 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$

• Si $a \neq 0$ y $a \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A^*) = 3$

$n^{\circ} \text{ incógnitas} = 3 \quad r(A) = r(A^*) = n^{\circ} \text{ incógnitas} \quad \boxed{\text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO}}$

• Si $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 2 \\ n^{\circ} \text{ incógnitas} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} r(A) = r(A^*) \neq n^{\circ} \text{ incógnitas} \\ \boxed{\text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO}} \end{cases}$$

• Si $a = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} r(A) \neq r(A^*) \\ \boxed{\text{SISTEMA INCOMPATIBLE}} \end{cases}$$

b) Para $a = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2z = 0 \Rightarrow z = 0 \\ y = \lambda \end{cases}$$

2020 JUNIO B.1 (2 puntos)

Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.

b) Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

a) $A \cdot A - 5A = -4I \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 1+m & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 \\ 0 & 5m & 0 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 0 & -m+4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

• $m-4 = 0 \Rightarrow m = 4$

• $m^2 - 5m = -4 \quad m^2 - 5m + 4 = 0$
 $\frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 1 \end{cases}$

• $-m+4 = 0$
 $m = 4$

Para que se cumpla,
 $m = 4$

b) $m = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Para que A sea invertible,
 su $|A| \neq 0$.

$|A| = 6 - 2 = 4 \neq 0$

La matriz A es invertible

$\Rightarrow \text{Adj} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj} A^t = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj} A^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$



2020 MODELO A.1 (2 puntos)

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule los valores de a y de b para que se verifique $A^2 = 2I$.

b) Para $a = 0$ y $b = 2$, determine la matriz X tal que $XA = B - X$.

$$a) A^2 = 2I \Rightarrow A \cdot A = 2I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+b & a+2 \\ ab+2b & b+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b=2 \\ a+2=0 \\ ab+2b=0 \\ b+4=2 \end{cases}$$

$$\bullet a+2=0$$

$$\boxed{a=-2}$$

$$\bullet b+4=2$$

$$\boxed{b=-2}$$

$$\text{Comprobamos: } a^2+b=2$$

$$(-2)^2-2=2 \checkmark$$

$$ab+2b=0$$

$$(-2) \cdot (-2) + 2(-2) = 0 \checkmark$$

$$b) \textcircled{1} X \cdot A = B - X$$

$$X \cdot A + X = B$$

$$X \cdot (A + I) = B$$

$$X = B \cdot (A + I)^{-1}$$

$$\textcircled{2} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A + I| = 3 - 2 = 1$$

$$\Rightarrow \text{Adj}(A + I) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A + I)^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A + I)^{-1} = \frac{1}{|A + I|} \cdot \text{Adj}(A + I)^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

2020 MODELO B.1 (2 puntos)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Proporcione el valor de m para que $A \cdot B = C^t$.

b) Para $m = 0$ calcule B^{-1} .

$$a) A \cdot B = C^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2m-1 & 0 & m+2 \\ m-1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet 2m-1=3 \Rightarrow 2m=4 \Rightarrow m=2$$

$$\bullet m+2=4 \Rightarrow m=2$$

$$\bullet m-1=1 \Rightarrow m=2$$

$$\text{Por tanto } \boxed{m=2}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |B| = 1 \Rightarrow \text{Adj } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj } B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \text{Adj } B^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

2020 MODELO B.2 (2 puntos)

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + ay + z = 6 \\ 2x - y + z = a - 1 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema para los distintos valores de $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 2$.

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & a-1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad |A| = -1 + 2 - a - 1 - 2a - 1 = -3a - 1$$

$$-3a - 1 = 0 \quad a = -\frac{1}{3}$$

$$\bullet \text{ Si } a \neq -\frac{1}{3} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A^*) = 3 \quad n^{\circ} \text{ incógnitas} = 3$$

$$r(A) = r(A^*) = n^{\circ} \text{ incógnitas}$$

$$\boxed{\text{SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO}}$$

$$\bullet \text{ Si } a = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & -\frac{4}{3} \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \cdot 3} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 2 & -1 & 1 & -\frac{4}{3} \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \cdot 3} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 6 & -3 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_2 - F_3} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 56 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 2 \\ n^{\circ} \text{ incógn} = 3 \end{array} \right\} r(A) = r(A^*) \neq n^{\circ} \text{ incógnitas} \quad \boxed{\text{SISTEMA INCOMPATIBLE}}$$

b) Para $a = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2F_1 - F_2 \\ F_1 + F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & 11 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{5F_3 - 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 6 \\ 5y + z = 11 \\ 7z = 7 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 1}$$

$$\bullet 5y + 1 = 11$$

$$5y = 10 \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

$$\bullet x + 2 \cdot 2 + 1 = 6$$

$$\boxed{x = 1}$$