2023 MODELO B.5 (2 puntos)

Para una población en la que se observa una variable aleatoria X con distribución normal, de media desconocida y desviación típica igual a 1,5, se tomó una muestra aleatoria simple para estimar la media poblacional y se obtuvo un intervalo de confianza cuyos extremos son 11,0703 y 12,9297.

a) Determine el valor de la media muestral.

b) Si el tamaño de la muestra fue 10, ¿cuál es el nivel de confianza del intervalo obtenido?

a) · $\sigma = 1,5$

· $IC(11,0703 \,;\, 12,9297)$

$$\bar{x} = \frac{12,9297 + 11,0703}{2} = \boxed{11,99985}$$

b) $n = 10$

① $E = \frac{12,9297 - 11,0703}{2} = 0,9297$

② $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{0,9297 \cdot \sqrt{10}}{1,5}$

$\Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$. $\Rightarrow n.c = 95\%$
TABLA.

③ $P(z_{\alpha/2} < 1,96) = nc + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 0,975 = nc + \frac{\alpha}{2}$

④ $\left.\begin{array}{l} 0'975 = nc + \frac{\alpha}{2} \\ \alpha = 1 - nc \end{array}\right\} \; 0'975 = nc + \frac{1-nc}{2} \Rightarrow 1,95 = 2nc + 1 - nc \Rightarrow nc = 1,95 - 1 \Rightarrow nc = 0'95$

$$\boxed{nc = 95\%}$$

2022 JUNIO COINCIDENTES B.5 (2 puntos)

Sea una población donde observamos la variable aleatoria X con distribución normal de media 20 y desviación típica 5. Sea Sea $\bar{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 25.

a) ¿Cuál es la distribución de $\bar{X}$?

b) Calcule $P(19 < \bar{X} < 22)$.

a) $\mu = 20 \quad \sigma = 5 \quad n = 25 \quad$ Distribución $\bar{x}: N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(20, \frac{5}{\sqrt{25}}\right) = \boxed{(20, 1)}$

b) $P(19 < \bar{x} < 22) = P\left(\frac{19-20}{1} < z < \frac{19-22}{1}\right) = P(-1 < z < 2)$

$= P(z<2) - P(z<-1) = P(z<2) - [1 - P(z<1)] = 0'9772 - (1 - 0'8413)$

$= \boxed{0'8185}$

2022 JUNIO A.5 (2 puntos)

Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2kg.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es 50 kg. Determine un intervalo de confianza del 99% para el peso medio de un saco de cemento.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilogramo, con un nivel de confianza del 90%.

a) $\sigma = 2kg \quad n = 20 \quad \bar{x} = 50\,kg$

$n.c = 0'99 \Rightarrow \alpha = 1 - 0'99 = 0'01 \Rightarrow P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(z_{\alpha/2} < K) = 0'99 + \frac{0'01}{2}$

$\Rightarrow P(z_{\alpha/2} < K) = 0'995 \rightarrow$ TABLA $\rightarrow z_{\alpha/2} = 2'575$

INTERVALO DE CONFIANZA

$I.C(\bar{x} - E \,;\, \bar{x} + E) \qquad E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'575 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} = 1'1516$

$I.C(50 - 1'1516 \,;\, 50 + 1'1516) = \boxed{(48'8484 \,;\, 51'1516)}$

b) ¿n? $E \leq 1\,kg \quad n.c = 0'9 \Rightarrow \alpha = 1 - nc = 1 - 0'9 = 0'1$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(z_{\alpha/2} < K) = 0'9 + \frac{0'1}{2} = 0'95 \rightarrow$ TABLA $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1'645$

$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1'645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1'645 \cdot 2}{1} \Rightarrow n = (1'645 \cdot 2)^2$

$n = 10'824 \simeq 11$

$\boxed{\text{Para que el error no supere 1kg, la muestra debe ser mínimo de 11 sacos.}}$

2022 JUNIO B.5 (2 puntos)

Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\bar{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

a) Determine el valor de σ sabiendo que $I = (58,2; 73,8)$ es un intervalo de confianza del 95% para μ.

b) Si $\sigma = 20$, calcule $P(-10 < \bar{X} - \mu < 10)$.

a) $n = 10$

① $I\,(58'2\,;\,73'8)$ → $\bar{x} = \dfrac{58'2 + 73'8}{2} = 66$; $E = \dfrac{73'8 - 58'2}{2} = 7'8$

② $nc = 0'95 \Rightarrow \alpha = 1 - nc = 1 - 0'95 = 0'05$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0'95 + \frac{0'05}{2}$

$P(z_{\alpha/2} < K) = 0'975$ TABLA $\Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$

③ $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 7'8 = 1'96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\sigma = 12'58}$

b) $\sigma = 20$ $\quad \underbrace{P(k_1 < \bar{x} - \mu < k_2)}_{\text{TIPIFICO}} = P\left(\dfrac{k_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \bar{x} - \mu < \dfrac{k_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)$

$P(-10 < \bar{x} - \mu < 10) = P\left(\dfrac{-10}{\frac{20}{\sqrt{10}}} < z < \dfrac{10}{\frac{20}{\sqrt{10}}} \right) = P(-1'58 < z < 1'58)$

$\Rightarrow P(z < 1'58) - P(z < -1'58) = P(z < 1'58) - [1 - P(z < 1'58)] = 0'9429 - (1 - 0'9429)$

$= \boxed{0'8858}$

2022 MODELO A.5 (2 puntos)

El tiempo diario de juego con videoconsolas de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 0,25 horas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\bar{X}$ no supere las 2,9 horas si $\mu = 2,75$horas.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 64 personas se ha obtenido un intervalo de confianza $(2'9388, 3'0613)$ para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

a) $\sigma = 0'25\,h$
$n = 25$
$\mu = 2'75$

$P(\bar{x} \le 2'9) = P\left(z \le \dfrac{2'9 - 2'75}{\frac{0'25}{\sqrt{25}}}\right) = P(z \le 3) \xrightarrow{\text{TABLA}} = \boxed{0'9987}$

b) $n = 64$

• $IC\,(2'9388, 3'0613)$ → $\bar{x} = \dfrac{3'0613 + 2'9388}{2} = 3'00005$; $E = \dfrac{3'0613 - 2'9388}{2} = 0'06125$

• $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0'06125 = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{0'25}{\sqrt{64}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \dfrac{0'06125 \cdot \sqrt{64}}{0'25} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$

• $P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(z_{\alpha/2} < 1'96) = nc + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$ TABLA $\Rightarrow 0'975 = nc + \frac{\alpha}{2}$

• $\begin{cases} 0'975 = nc + \frac{\alpha}{2} \\ nc + \alpha = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{array}{r} 1'95 = 2nc + \alpha \\ - \quad 1 = nc + \alpha \\ \hline 0'95 = nc \end{array}$

$\boxed{\text{El nivel de confianza es al } 95\,\%.}$

2022 MODELO B.5 (2 puntos)

Una empresa que gestiona una aplicación de movilidad sostenible sabe que el tiempo que tardan en llegar a la universidad en coche los estudiantes se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 6$ minutos.

a) Una muestra aleatoria simple de 81 universitarios proporciona un tiempo medio de traslado hasta la universidad de 44 minutos. Calcule el intervalo de confianza al 90% para estimar μ.

b) Determine el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para obtener un intervalo de confianza para μ de amplitud a lo sumo de 3 minutos, con un nivel de confianza del 95%.

a) $\sigma = 6$ min
$n = 81$
$\bar{x} = 44$ min

①• $nc = 0'9 \Rightarrow \alpha = 1 - nc = 1 - 0'9 = 0'1$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(z_{\alpha/2} < K) = 0'9 + \frac{0'1}{2} \Rightarrow P(z_{\alpha/2} < K) = 0'95$ TABLA

$z_{\alpha/2} = 1'645$

②• $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1'645 \cdot \dfrac{6}{\sqrt{81}} = 1'097$

③ $I.C\,(\bar{x} - E\,;\,\bar{x} + E) \Rightarrow I.C\,(44 - 1'097;\ 44 + 1'097) = \boxed{(42'903;\ 45'097)}$

b) ¿n? Amplitud del $I.C = 3$ $\quad n.c = 0'95$

① $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'95 = 0'05$ $\quad P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0'95 + \frac{0'05}{2} = 0'975$ TABLA

$z_{\alpha/2} = 1'96$

② $I.C\left(\bar{x}-E\, ;\, \bar{x}+E\right) \Rightarrow$ Amplitud $= \bar{x}+E-(\bar{x}-E)=3 \Rightarrow 2E=3 \Rightarrow E=1'5$

③ $E = z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1'5 = 1'96\cdot\dfrac{6}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \dfrac{1'96\cdot 6}{1'5} \Rightarrow n = \left(\dfrac{1'96\cdot 6}{1'5}\right)^2 = 61'47$

$\boxed{\text{La muestra mínima es de } 62}$

2021 JULIO COINCIDENTES A.5 (2 puntos)

En el envasado de un determinado producto, medido en gramos (g), se establece que la cantidad de producto se puede aproximar por una distribución normal con media μ y desviación típica $\sigma = 6g$.

a) Se observa que el contenido en los envases del producto, en una muestra de tamaño $n = 36$, tiene una media de 500g. Calcule el intervalo de confianza al 95% para le media μ

b) Determine el tamaño de la muestra necesario para que un intervalo al 95% tenga un error menor que 1,5g.

a) $\sigma = 6g$ $n = 36$ $\bar{x} = 500g$ $nc = 0'95$

① $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'95 = 0'05$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \dfrac{\alpha}{2} = 0'95 + \dfrac{0'05}{2} = 0'975$ TABLA $z_{\alpha/2} = 1'96$

② $E = z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96\cdot\dfrac{6}{\sqrt{36}} = 1'96$

③ $IC\left(\bar{x}-E\, ;\, \bar{x}+E\right) = (500 - 1'96\, ;\, 500 + 1'96) = \boxed{(498'04\, ;\, 501'96)}$

b) $nc = 0'95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$ $E < 1'5g$

$E = z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1'5 = 1'96\cdot\dfrac{6}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \dfrac{1'96\cdot 6}{1'5} \Rightarrow n = \left(\dfrac{1'96\cdot 6}{1'5}\right)^2 = 61'47$

$\boxed{\text{Para que el error no supere los } 1'5g\text{, la muestra debe ser de } 62.}$

2021 JULIO COINCIDENTES B.5 (2 puntos)

El número de pasajeros en un día laborable en el metro de Madrid, medido en millones de individuos, se puede aproximar por una distribución normal con media μ y desviación típica $\sigma = 0{,}1$ millones.

a) Si $\mu = 2{,}2$ y se toma una muestra al azar de 25 días, calcule la probabilidad de que $\bar{X}$ no supere los 2,25 millones de pasajeros.

b) De una muestra de $n = 16$ días, tomados al azar, se obtuvo una media muestral de 2,19. Para esta muestra, calcule un intervalo de confianza para μ al 90%.

a) $\sigma = 0'1$ millones. $\mu = 2'2$ $n = 25$

$P(\bar{x} < 2'25) = P\left(z < \dfrac{2'25 - 2'2}{\frac{0'1}{\sqrt{25}}}\right) = P(z < 2'5) \overset{\text{TABLA}}{=} \boxed{0'9938}$

b) $n = 16$ $\bar{x} = 2'19$ $n.c = 0'9$

① $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'9 = 0'1$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \dfrac{\alpha}{2} = 0'9 + \dfrac{0'1}{2} = 0'95$ TABLA $z_{\alpha/2} = 1'645$

② $E = z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'645\cdot\dfrac{0'1}{\sqrt{16}} = 0'0411$

③ $I.C\left(\bar{x}-E\, ;\, \bar{x}+E\right) = (2'19 - 0'0411\, ;\, 2'19 + 0'0411) = \boxed{(2'149\, ;\, 2'231)}$

2021 JULIO A.5 (2 puntos)

El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95% para μ.

b) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\bar{X}$, este comprendida entre 57 y 61 gramos.

a) $\sigma = 8g$ $n = 20$ $\bar{x} = 60g$ $n.c = 0'95$

① $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'95 = 0'05$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \dfrac{\alpha}{2} = 0'95 + \dfrac{0'05}{2} = 0'975 \Rightarrow$ TABLA $\Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$

② $E = z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96\cdot\dfrac{8}{\sqrt{20}} = 3'506$

③ $I.C\left(\bar{x}-E\, ;\, \bar{x}+E\right) = (60 - 3'506\, ;\, 60 + 3'506) = \boxed{(56'494\, ;\, 63'506)}$

b) $\mu = 59g$ $P(57 < \bar{x} < 61) = P\left(\dfrac{57-59}{\frac{8}{\sqrt{10}}} < z < \dfrac{61-59}{\frac{8}{\sqrt{10}}}\right) = P(-0'79 < z < 0'79)$

$n=10$

$$= P(z<0'79) - P(z<-0'79) = P(z<0'79) - (1 - P(z<0'79)) =$$

$$= 0'7852 - (1 - 0'7852) = \boxed{0'5704}$$

2021 JULIO B.5 (2 puntos)

El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación **de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95%.**

b) Suponga que μ = 32 minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\bar{X}$, sea menor que 30,5 minutos.

a) $\sigma = 3\,min$ ¿n? $E<1$ $n.c = 0'95$

① $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'95 = 0'05 \Rightarrow P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0'95 + \frac{0'05}{2} = 0'975$ TABLA

$z_{\alpha/2} = 1'96$

② $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1'96 \cdot 3}{1} \Rightarrow n = (1'96 \cdot 3)^2 = 34'57 \simeq 35$

$\boxed{\text{Para que el error no supere 1 min, la muestra debe ser mínimo de 35}}$

b) $\mu = 32$
$n = 16$

$$P(\bar{x} < 30'5) = P\left(z < \frac{30'5 - 32}{\frac{3}{\sqrt{16}}}\right) = P(z<-2) = 1 - P(z<2)$$

$$= 1 - 0'9772 = \boxed{0'0228}$$

2021 JUNIO COINCIDENTE A.5 (2 puntos)

Una máquina de empaquetar mantequilla la corta en barras. El peso de una barra de mantequilla se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 4 gramos.

a) Se analiza el peso de 15 barras. La media muestral resulta ser 254 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95% para la media muestral.

b) Para una muestra de 25 barras, se sabe que la media poblacional del peso de una barra de mantequilla es 250 gramos. Calcule la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 248 gramos.

a) $\sigma = 4g$
$n = 15$
$\bar{x} = 254g$
$nc = 0'95$

① $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'95 = 0'05$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0'95 + \frac{0'05}{2} = 0'975$ TABLA $z_{\alpha/2} = 1'96$

② $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96 \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} = 2'024$

③ $IC(\bar{x} - E; \bar{x} + E) = (254 - 2'024; 254 + 2'024) = \boxed{(251'976; 256'024)}$

b) $n = 25$
$\mu = 250g$

$$P(\bar{x} < 248) = P\left(z < \frac{248 - 250}{\frac{4}{\sqrt{25}}}\right) = P(z<-2'5) = 1 - P(z<2'5)$$

$$= 1 - 0'9938 = \boxed{0'0062}$$

2021 JUNIO B.5 (2 puntos)

El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\bar{X}$ no supere los 125 gramos si $\mu = 120$ gramos.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza $(117{,}3444; 124{,}6556)$ para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

a) $\sigma = 20g$
$n = 36$
$\mu = 120$

$$P(\bar{x} < 125) = P\left(z < \frac{125 - 120}{\frac{20}{\sqrt{36}}}\right) = P(z < 1'5) \overset{\text{TABLA}}{=} \boxed{0'9332}$$

b) $n = 81$

$IC(117'3444; 124'6556)$

$\bar{x} = \frac{124'6556 + 117'3444}{2} = 121$

① $E = \frac{124'6556 - 117'3444}{2} = 3'6556$

② $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3'6556 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{20}{\sqrt{81}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{3'6556 \cdot \sqrt{81}}{20} = 1'645$

③ $P(z_{\alpha/2} < 1'645) = nc + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \left(0'95 = nc + \frac{\alpha}{2}\right) \times 2 \Rightarrow 1'9 = 2nc + \alpha$

④ $\begin{cases} 1'9 = 2nc + \alpha \\ nc + \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2nc + \alpha = 1'9 \\ -\; nc + \alpha = 1 \end{cases}$; $nc = 0'9$

$\boxed{\text{El nivel de confianza es del 90\%}}$

2021 MODELO A.5 (2 puntos)
El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ km y desviación típica $\sigma = 10$ km.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95% para μ.
b) Suponga que $\mu = 28$ kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, $\bar{X}$, esté entre 28 y 30 kilómetros.

a) $\sigma = 10$ km
$n = 20$
$\bar{x} = 30$ km
$nc = 0'95$

① $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'95 = 0'05$

$P(z_{\alpha/2} < k) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0'95 + \frac{0'05}{2} = 0'975$ TABLA $z_{\alpha/2} = 1'96$

② $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1'96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}} = 4'383$

③ $IC(\bar{x} - E;\ \bar{x} + E) = (30 - 4'383;\ 30 + 4'383) = \boxed{(25'617;\ 34'383)}$

b) $\mu = 28$ km
$n = 10$

$P(28 < \bar{x} < 30) = P\left(\frac{28-28}{\frac{10}{\sqrt{10}}} < z < \frac{30-28}{\frac{10}{\sqrt{10}}}\right) = P(0 < z < 0'63)$

$= P(z < 0'63) - P(z < 0) = 0'7357 - 0'5 = \boxed{0'2357}$

2021 MODELO B.5 (2 puntos)
Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica $\sigma = 300$ calorías.
a) Determine el tamaño mínimo que debe tener la muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95%.
b) Suponga que $\mu = 3000$ calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 50$ atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

a) $\sigma = 300$ cal.
¿n?
$E < 100$ cal.
$n.c = 95\%$

① $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'95 = 0'05$

$P(z_{\alpha/2} < k) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0'95 + \frac{0'05}{2} = 0'975$ TABLA $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$

② $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 100 = 1'96 \cdot \frac{300}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1'96 \cdot 300}{100}$

$\Rightarrow n = \left(\frac{1'96 \cdot 300}{100}\right)^2 = 34'57 \simeq 35$

$\boxed{\text{Para que el error no supere las 100 calorías, la muestra mínima es de 35.}}$

b) $\mu = 3000$ cal.
$n = 50$

$P(\bar{x} > 2700) = P\left(z > \frac{2700 - 3000}{\frac{300}{\sqrt{50}}}\right) = P(z > -7'07)$

$= P(z < 7'07) \simeq \boxed{1}$

2020 SEPTIEMBRE A.5 (2 puntos)
El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60$ g.
a) Determine el tamaño mínimo que debe tener la muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 20g, con un nivel de confianza del 95%.
b) Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\bar{X} \leq 220) = 0,9940$.

a) $\sigma = 60g$ ¿n? $E < 20g$ n.c $= 0'95$

① $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'95 = 0'05 \Rightarrow P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0'95 + \frac{0'05}{2} = 0'975 \to$ TABLA $\to z_{\alpha/2} = 1'96$

② $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 20 = 1'96 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1'96 \cdot 60}{20} \Rightarrow n = \left(\frac{1'96 \cdot 60}{20}\right)^2 = 34'57$

$n \geq 35$

Para que el error no supere los 20g, la muestra debe ser mínimo de 35.

b) $n = 100$ ¿μ? $P(\bar{x} < 220) = 0'9940$

$P\left(z < \frac{220-\mu}{\frac{60}{\sqrt{100}}}\right) = 0'9940 \Rightarrow$ TABLA $\Rightarrow \frac{220-\mu}{\frac{60}{10}} = 2'51$

$\Rightarrow 220 - \mu = 2'51 \cdot 6 \Rightarrow \mu = 220 - 2'51 \cdot 6 = 204'94 \simeq \boxed{205g}$

2020 SEPTIEMBRE B.5 (2 puntos)

Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarda en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 minutos.

a) Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza $(26,9; 37,1)$, expresado en minutos, para estimar el tiempo medio que tarda en realizar el recorrido, μ, con un nivel de confianza del 98,92%. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.

b) Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de 16 días elegidos al azar, esta persona tarde entre 25 y 35 minutos de media para completar el recorrido.

a) $\sigma = 10$ min

I.C $(26'9 ; 37'1)$ → ① $E = \frac{37'1 - 26'9}{2} = 5'1$

n.c $= 0'9892$ ¿n? ② $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'9892 = 0'0108$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0'9892 + \frac{0'0108}{2} = 0'9946 \to$ TABLA

$\Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'55$

③ $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5'1 = 2'55 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2'55 \cdot 10}{5'1} \Rightarrow n = \left(\frac{2'55 \cdot 10}{5'1}\right)^2$

$\Rightarrow \boxed{n = 25}$

b) $\mu = 30$, $n = 16$

$P(25 < \bar{x} < 35) = P\left(\frac{25-30}{\frac{10}{\sqrt{16}}} < z < \frac{35-30}{\frac{10}{\sqrt{16}}}\right) = P(-2 < z < 2)$

$= P(z<2) - P(z<-2) = P(z<2) - (1 - P(z<2)) = 0'9772 - (1 - 0'9772)$

$= \boxed{0'9544}$

2020 JUNIO COINCIDENTES A.5 (2 puntos)

El salario medio bruto mensual en España en 2019 se puede aproximar por una distribución normal con $\sigma = 900$ euros.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener la muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ, por la media muestral, $\bar{X}$, sea a lo sumo de 200 euros, con un nivel de confianza del 95%.

b) Suponga que $\mu = 1889$ euros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 64 individuos, la media muestral, $\bar{X}$, sea mayor que 1900 euros.

a) $\sigma = 900$ € ¿n? $E < 200$ € n.c $= 0'95$

① $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'95 = 0'05$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0'95 + \frac{0'05}{2} = 0'975 \to$ TABLA $\to z_{\alpha/2} = 1'96$

② $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 200 = 1'96 \cdot \frac{900}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1'96 \cdot 900}{200}$

$\Rightarrow n = \left(\frac{1'96 \cdot 900}{200}\right)^2 = 77'79 \simeq 78$

Para que el error no supere los 200 €, la muestra debe ser mínimo de 78.

b) $\mu = 1889$ €

$n = 64$ $\quad P(\bar{x} > 1900) = P\left(z > \frac{1900 - 1889}{\frac{900}{\sqrt{64}}}\right) = P(z > 0'10) = 1 - P(z < 0'1)$

$= 1 - 0'5398 = \boxed{0'4602}$

2020 JUNIO COINCIDENTES B.5 (2 puntos)

Se estima que el coste medio anual de la cesta de la compra de una familia tipo se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 500$ euros.

a) Se ha analizado el consumo de 100 familias tipo, obteniéndose un coste medio estimado de 5100 euros anuales. Calcule un intervalo de confianza al 90% para la media μ.

b) A partir de una muestra de 36 familias tipo, se ha obtenido un intervalo de confianza para μ con un error de estimación de 160 euros. Determine el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

a) $\sigma = 500€$, $n = 100$, $\bar{x} = 5100$, $n.c = 0'9$

① $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'9 = 0'1$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0'9 + \frac{0'1}{2} = 0'95$ TABLA $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1'645$

② $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'645 \cdot \frac{500}{\sqrt{100}} = 82'25$

③ $I.C\ (\bar{x} - E; \bar{x} + E) = (5100 - 82'25; 5100 + 82'25) = \boxed{(5017'75; 5182'25)}$

b) $n = 36$ $\quad E < 160$ $\quad$ ¿n.c?

① $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 160 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{500}{\sqrt{36}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{160\sqrt{36}}{500} = 1'92$

② $P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(z_{\alpha/2} < 1'92) = nc + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 0'9726 = nc + \frac{\alpha}{2}$

③ $\begin{cases} \left(0'9726 = nc + \frac{\alpha}{2}\right) \times 2 \\ nc + \alpha = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 1'9452 = 2nc + \alpha \\ \ominus\ 1 = nc + \alpha \end{cases}$

$0'9452 = nc$

El nivel de confianza utilizado es al 94'52%.

2020 JULIO A.5 (2 puntos)

La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica $0{,}5km$.

a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido sea como mucho 0,05km con un nivel de confianza del 95,44%.

b) Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

a) $\mu = 2km$, $\sigma = 0'5Km$, ¿n?, $E < 0'05Km$, $nc = 95'44\%$

① $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'9544 = 0'0456$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0'9544 + \frac{0'0456}{2} = 0'9772$ TABLA $z_{\alpha/2} = 2$

② $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0'05 = 2 \cdot \frac{0'5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2 \cdot 0'5}{0'05}$

$\Rightarrow n = \left(\frac{2 \cdot 0'5}{0'05}\right)^2 = 400$

Para que el error no supere los 0'05Km la muestra debe ser como mínimo 400.

b) $n = 16$, $\mu = 2Km$, $\sigma = 0'5$ $\rightarrow$ Con los 16 bolis, podemos escribir mínimo 30km, por tanto, cada boli hará de $\bar{x} = \frac{30}{16} = 1'875Km$

$P(\bar{x} > 1'875) = P\left(z > \frac{1'875 - 2}{\frac{0'5}{\sqrt{16}}}\right) = P(z > -1) = P(z < 1) = \boxed{0'8413}$

2020 JUNIO B.5 (2 puntos)

Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.

a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes:

40 45 38 44 41 40 35 50 40 37

Construya el intervalo de confianza al 90% para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.

b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

a) $\sigma = 7L$
$n = 10$
$n.c = 0'9$

① $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N} = \frac{40+45+38+44+41+40+35+50+40+37}{10} = 4'1$

② $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'9 = 0'1$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0'9 + \frac{0'1}{2} = 0'95 \rightarrow TABLA \rightarrow z_{\alpha/2} = 1'645$

③ $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'645 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}} = 3'641$

④ $I.C\ (\bar{x} - E;\ \bar{x} + E) = (4'1 - 3'641;\ 4'1 + 3'641) = \boxed{(0'459;\ 7'741)}$

b) $n = 64$ Amplitud intervalo $= 5$ ¿nc?

① $I.C\ (\bar{x} - E;\ \bar{x} + E) \Rightarrow$ Amplitud $= \bar{x} + E - (\bar{x} + E) = 2E \Rightarrow 2E = 5 \Rightarrow E = 2'5$

② $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2'5 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{7}{\sqrt{64}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2'5 \cdot \sqrt{64}}{7} = 2'86$

③ $P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P(z_{\alpha/2} < 2'86) = nc + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 0'9979 = nc + \frac{\alpha}{2}$

④ $\begin{cases} (nc + \frac{\alpha}{2} = 0'9979) \times 2 \\ nc + \alpha = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2nc + \alpha = 1'9958 \\ -\ nc + \alpha = 1 \end{cases}$

$nc = 0'9958$

El nivel de confianza utilizado es del 99'58%.

2020 MODELO A.4 (2 puntos)

La cantidad de principio activo en las pastillas de una determinada marca de detergente puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ mg y varianza 0,09 mg^2.

a) Si una muestra aleatoria simple de 400 pastillas proporcionó una cantidad media de principio activo de 13 mg, halle un intervalo de confianza al 99% para la media poblacional.

b) Determine el tamaño muestral mínimo para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor de 0,05 mg con un nivel de confianza del 98%.

a) σ^2 (varianza) $= 0'09 \Rightarrow \sigma$ (desviación típica) $= \sqrt{0'09} = 0'3$

$n = 400$
$\bar{x} = 13$
$nc = 0'99$

① $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'99 = 0'01$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0'99 + \frac{0'01}{2} = 0'995 \rightarrow TABLA \rightarrow z_{\alpha/2} = 2'575$

② $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'575 \cdot \frac{0'3}{\sqrt{400}} = 0'039$

③ $I.C\ (\bar{x} - E;\ \bar{x} + E) = (13 - 0'039;\ 13 + 0'039) = \boxed{(12'961;\ 13'039)}$

b) ¿n?
$E < 0'05$
$n.c = 0'98$

① $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'98 = 0'02$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0'98 + \frac{0'02}{2} = 0'99 \rightarrow TABLA \rightarrow z_{\alpha/2} = 2'325$

② $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0'05 = 2'325 \cdot \frac{0'3}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2'325 \cdot 0'3}{0'05} \Rightarrow n = \left(\frac{2'325 \cdot 0'3}{0'05}\right)^2$

$n = 194'6 \simeq 195$

Para que el error no supere los 0'05 mg la muestra debe ser mínimo de 195.

2020 MODELO B.4 (2 puntos)

En verano, en Madrid, se instalan puestos callejeros de venta de melones y sandías. Se sabe que el peso de las sandías puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 450g$.

a) Si se toma una muestra de 25 sandías y se obtiene una media muestral de $\bar{x} = 2700$g, calcule un intervalo de confianza al 95% para la media poblacional.

b) Si el peso medio de las sandias es μ = 3000g, calcule la probabilidad de que una muestra de cuatro sandías cogidas al azar pesen de media entre 3000g y 3450g.

a) $\sigma = 450g$
$n = 25$

① $\alpha = 1 - nc = 1 - 0'95 = 0'05$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0'95 + \frac{0'05}{2} = 0'975 \rightarrow TABLA \rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$

$\bar{x} = 2700g$
$n.c = 0'95$

② $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96 \cdot \frac{450}{\sqrt{25}} = 176'4g$

③ $I.C\ (\bar{x} - E ; \bar{x} + E) = (2700 - 176'4 ; 2700 + 176'4) = \boxed{(2523'6 ; 2876'4)}$

b) $\mu = 3000g$
$n = 4$

$P(3000 < \bar{x} < 3450) = P\left(\frac{3000 - 3000}{\frac{450}{\sqrt{4}}} < z < \frac{3450 - 3000}{\frac{450}{\sqrt{4}}}\right) = P(0 < z < 2)$

$= P(z < 2) - P(z < 0) = 0'9772 - 0'5 = \boxed{0'4772}$