

2023 MODELO A.2

Una onda transversal se propaga en el sentido negativo del eje x con una velocidad de $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. En el instante inicial y en el origen ($x = 0$), la elongación es nula y la velocidad de oscilación es $-40\pi \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Sabiendo que la separación entre dos puntos que oscilan en fase es de 50 cm , determine:

a) La amplitud y la frecuencia de la onda.

b) La expresión matemática de la onda.

a) $v = 2 \text{ m/s}$

• En $t = 0 \text{ s}$, $x = 0 \text{ m}$, $y = 0$, $v = -40\pi \text{ cm/s}$

• Dos puntos en fase están separados la longitud de onda $\Rightarrow \lambda = 0,5 \text{ m}$

① $v_p = \lambda \cdot f \Rightarrow f = \frac{v_p}{\lambda} = \frac{2}{0,5} = 4 \text{ Hz}$

positiva, porque la onda va a la izquierda.

② Ecuación general de la onda: $y(x, t) = A \cdot \sin(\omega t + kx + \varphi_0)$

• En $t = 0 \text{ s} \Rightarrow 0 = A \cdot \sin(\omega \cdot 0 + k \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow 0 = \sin \varphi_0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 0 \text{ rad } \times \\ \varphi_0 = \pi \text{ rad } \checkmark \end{cases}$

(Nos quedamos con $\varphi_0 = \pi \text{ rad}$ porque nos dicen que la velocidad en $t = 0 \text{ s}$ es negativa)

③ $v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow v = A\omega \cos(\omega t + kx + \varphi_0) \Rightarrow -40\pi \cdot 10^{-2} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot 0 + k \cdot 0 + \pi)$

④ Sacamos $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 4 = 8\pi \text{ rad/s}$

⑤ $-40\pi \cdot 10^{-2} = -A \cdot 8\pi \Rightarrow A = \frac{-40\pi \cdot 10^{-2}}{-8\pi} = 0,05 \text{ m}$

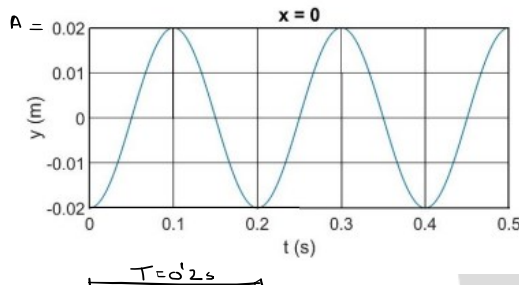
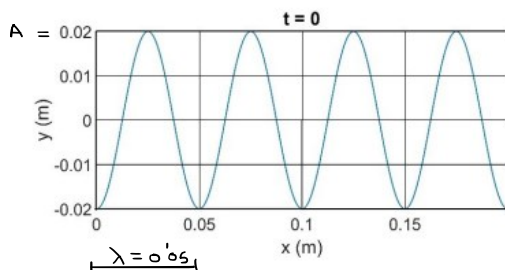
b) • Sacamos $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \text{ rad/m}$ • $y(x, t) = 0,05 \cdot \sin(8\pi t + 4\pi x + \pi) \text{ m}$

2022 JULIO COINCIDENTE A.2

Por una cuerda se propaga una onda sinusoidal en el sentido positivo del eje x, descrita por las siguientes gráficas. Deduzca:

a) La expresión matemática que describe la onda.

b) La velocidad de propagación de la onda y la velocidad de vibración del punto de la cuerda situado en $x = 0,1 \text{ m}$ en el instante $t = 3 \text{ s}$.



a)

① Ecuación del movimiento: $y = A \cdot \sin(\omega t \pm kx + \varphi_0)$

② $A = 0,02 \text{ m}$; $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,2} = 10\pi \text{ rad/s}$; $k = \text{negativa ya que se mueve en el sentido positivo del eje } x$. $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,05} = 40\pi \text{ rad/m}$

③ $y = 0,02 \cdot \sin(10\pi t - 40\pi x + \varphi_0)$

④ Para calcular φ_0 , consideramos que en $t = 0 \text{ s}$, $x = 0$ y $y = -0,02 \text{ m}$

• $-0,02 = 0,02 \cdot \sin(10\pi t - 40\pi x + \varphi_0) \Rightarrow -1 = \sin \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$

⑤ $y = 0,02 \cdot \sin(10\pi t - 40\pi x + \frac{3\pi}{2}) \text{ m}$

b) ① $v_p = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_p = \frac{0,05}{0,2} = 0,25 \text{ m/s}$

② $v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow v = \frac{d(0,02 \cdot \sin(10\pi t - 40\pi x + \frac{3\pi}{2}))}{dt} \Rightarrow v = 0,02 \cdot 10\pi \cdot \cos(10\pi t - 40\pi x + \frac{3\pi}{2})$

$\Rightarrow v = 0,2\pi \cos(10\pi t - 40\pi x + \frac{3\pi}{2})$

• Para $x = 0,1 \text{ m}$ en $t = 3 \text{ s}$:



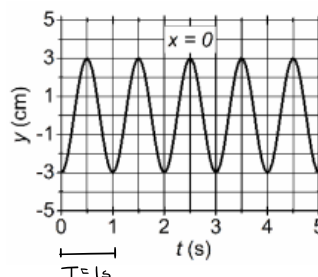
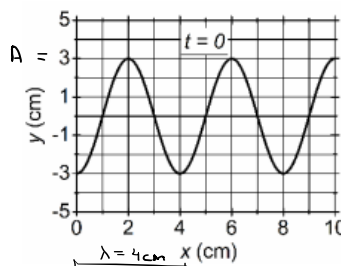
$$\Rightarrow v = 0.2\pi \cos(10\pi \cdot 3 - 40\pi \cdot 0.1 + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow v = 0 \text{ m/s}$$

2022 JULIO A.2

Una onda armónica transversal se propaga en el sentido positivo del eje x. En la figura se tiene una gráfica de la elongación de la onda para $t = 0$ y para $x = 0$. A partir de dicha información determine:

a) La expresión matemática de la onda.

b) La velocidad de propagación de la onda y la velocidad de oscilación del punto $x = 3 \text{ cm}$ en $t = 1 \text{ s}$.



a) ① $y = A \cdot \sin(\omega t \pm kx + \varphi_0)$

② $A = 0.03 \text{ m}$ • $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad/s}$

$\lambda = 0.04 \text{ m}$

$T = 1 \text{ s}$

• $k = \text{negative porque va en sentido positivo del eje } x \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.04} = 50\pi \text{ rad/m.}$

③ $y = 0.03 \cdot \sin(2\pi t - 50\pi x + \varphi_0)$

④ Para sacar $\varphi_0 \Rightarrow$ En $t=0 \text{ s}$, $x=0 \text{ m}$ e $y=-0.03 \text{ m}$

• $-0.03 = 0.03 \cdot \sin(2\pi \cdot 0 - 50\pi \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow -1 = \sin \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad.}$

⑤ $y = 0.03 \cdot \sin(2\pi t - 50\pi x + \frac{3\pi}{2}) \text{ m}$

b) ① $v_p = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_p = \frac{0.04}{1} = 0.04 \text{ m/s}$

② $v = \frac{dy}{dt} = \frac{d(0.03 \cdot \sin(2\pi t - 50\pi x + \frac{3\pi}{2}))}{dt} = 0.03 \cdot 2\pi \cdot \cos(2\pi t - 50\pi x + \frac{3\pi}{2})$

$v = 0.06\pi \cos(2\pi t - 50\pi x + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow$ Para $x=0.03 \text{ m}$ y $t=1 \text{ s}$:

$\Rightarrow v = 0.06\pi \cos(2\pi \cdot 1 - 50\pi \cdot 0.03 + \frac{3\pi}{2}) = 0.188 \text{ m/s}$

2022 JUNIO COINCIDENTE B.2

Las ondas sísmicas que registra un sismógrafo se pueden aproximar a una onda de la forma $y = y_0 \sin(\omega t - kx)$. En un determinado sismo el instrumento detecta una onda de frecuencia 0.73 Hz y amplitud 5.5 cm . Sabiendo que la velocidad de propagación de las ondas en el material por el que se transmite es de $12 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, obtenga:

a) La longitud de onda de las ondas y la expresión matemática de la onda.

b) La velocidad y aceleración máximas de oscilación que experimentan los puntos del medio material al paso de la onda sísmica.

a) $y = y_0 \cdot \sin(\omega t - kx)$

$f = 0.73 \text{ Hz}$

$A = 0.055 \text{ m}$

$v_p = \frac{12 \text{ km}}{\text{s}} \cdot \frac{1000}{1 \text{ km}} = 12000 \text{ m/s}$

① $v_p = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow$ Como $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.73} = 1.37 \text{ s.}$

$\Rightarrow 12.000 = \frac{\lambda}{1.37} \Rightarrow \lambda = 1.37 \cdot 12.000 = 16440 \text{ m.}$

② $y = y_0 \cdot \sin(\omega t - kx)$ donde $y_0 = 0.055 \text{ m}$

• $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1.37} = 1.46\pi \text{ rad/s}$ • $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{16440} = 1.21 \cdot 10^{-4} \pi \text{ rad/m.}$

$\Rightarrow y = 0.055 \cdot \sin(1.46\pi t - 1.21 \cdot 10^{-4} \pi x)$

b) ① $v = \frac{dy}{dt} = \frac{d(0.055 \cdot \sin(1.46\pi t - 1.21 \cdot 10^{-4} \pi x))}{dt} \Rightarrow v = 0.055 \cdot 1.46\pi \cdot \cos(1.46\pi t - 1.21 \cdot 10^{-4} \pi x)$
($v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t - kx)$)

$\Rightarrow v = 0.0803\pi \cos(1.46\pi t - 1.21 \cdot 10^{-4} \pi x)$ • La velocidad es máxima cuando el coseno obtiene su mayor valor $\Rightarrow \cos(1.46\pi t - 1.21 \cdot 10^{-4} \pi x) = 1$.

por tanto, $v_{\text{máx}} = 0.0803\pi \text{ m/s}$ ($v_{\text{máx}} = A \cdot \omega$)



$$\textcircled{2} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(0.0803\pi \cos(1.46\pi t - 1.21 \cdot 10^{-4}\pi x))}{dt} = 0.0803\pi \cdot 1.46\pi \cdot (-\sin(1.46\pi t - 1.21 \cdot 10^{-4}\pi x))$$

$$\Rightarrow a = -1.16 \cdot \sin(1.46\pi t - 1.21 \cdot 10^{-4}\pi x) \quad (a = -A\omega^2 \sin(\omega t - kx))$$

• La aceleración es máxima cuando el seno toma mayor valor $\Rightarrow \sin(1.46\pi t - 1.21 \cdot 10^{-4}\pi x) = 1$

Por tanto, $a_{\max} = -1.16 \text{ m/s}^2$ ($a_{\max} = -A \cdot \omega^2$)

2022 JUNIO A.2

Por una cuerda dispuesta a lo largo del eje x viaja una onda armónica que desplaza los elementos de la cuerda en la dirección del eje y. Se sabe que los elementos A y B, respectivamente ubicados en $x_A = 0 \text{ m}$ y $x_B = 2 \text{ m}$, oscilan en fase y cortan al eje x cada 4 s. Teniendo en cuenta que no hay entre A y B ningún otro elemento que oscile en fase con ellos:

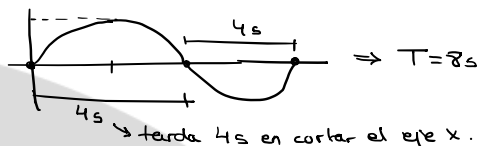
a) Calcule el valor de la velocidad de propagación.

b) Escriba la expresión matemática de la onda, si esta viaja en el sentido negativo del eje x y en el instante inicial los elementos A y B presentan desplazamiento igual a +10 cm y velocidad nula.

a) A y B están en fase. Si están en fase, significa que la distancia entre A y B es λ .

Por tanto, $\lambda = 2 \text{ m}$

Además, movimiento, por ejemplo, del punto A:



$$v_p = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_p = \frac{2}{8} = 0.25 \text{ m/s}$$

b) Expresión de la onda: $y = A \sin(\omega t \pm kx + \varphi_0)$

• k es positiva porque viaja en sentido negativo del eje x.

• En $t=0 \text{ s}$ y $x=0 \text{ m}$ (momento inicial) $\Rightarrow y=0.1 \text{ m}$ y $v=0 \text{ m/s}$.

Cuando la velocidad es nula me están diciendo que nos encontramos en el punto máximo, donde $A=y=0.1 \text{ m}$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8} = 0.25\pi \text{ rad/s} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/m}$$

Por tanto: $y = 0.1 \cdot \sin(0.25\pi t + \pi x + \varphi_0)$ • Para sacar φ_0 , cogemos los datos del momento inicial:

$$\Rightarrow 0.1 = 0.1 \cdot \sin(0.25\pi \cdot 0 + \pi \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow 1 = \sin \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\Rightarrow y = 0.1 \cdot \sin\left(0.25\pi t + \pi x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

2022 MODELO A.2

La expresión matemática de una onda transversal que se propaga en el sentido positivo del eje x, con una velocidad de propagación de $4/3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, es: $y(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$. Se sabe que en el instante $t = 1 \text{ s}$ el punto situado en $x = 1 \text{ m}$ tiene una aceleración de $-32\pi^2 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ y un desplazamiento de +2 cm a lo largo de la dirección y. Si en el instante $t = 0 \text{ s}$, el punto situado en $x = 0$ tiene el desplazamiento máximo de valor -4 cm, determine:

a) La frecuencia angular y el vector de onda.

b) La amplitud y la fase inicial de la onda φ .

a) k = negativa porque va en sentido positivo del eje x.

$$v_p = \frac{4}{3} \text{ m/s}$$

• En $t=1 \text{ s}$, $x=1 \text{ m}$, $a = -32\pi^2 \text{ cm/s}^2 = -0.32\pi^2 \text{ m/s}^2$, $y = 0.02 \text{ m}$

• En $t=0 \text{ s}$, $x=0 \text{ m}$, $y=A = -0.04 \text{ m}$

$$\textcircled{1} \quad y = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \Rightarrow v = \frac{dy}{dt} = \frac{d(A \cos(\omega t - kx + \varphi_0))}{dt} \Rightarrow v = -A\omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\textcircled{2} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(-A\omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0))}{dt} \Rightarrow a = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$



$$\Rightarrow a = -\omega^2 \cdot \underbrace{A \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0)}_y \Rightarrow a = -\omega^2 \cdot y \Rightarrow -0'32 \pi^2 = -\omega^2 \cdot 0'02$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{0'32 \pi^2}{0'02} \Rightarrow \omega = \sqrt{157'01} = 12'57 \text{ rad/s}$$

b) $A = 0'04 \text{ m}$ Para sacar $\varphi_0 \Rightarrow \text{En } t=0, x=0 \text{ e } y=A. \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{12'57} = 0'16 \pi \text{ s.}$

• $v_p = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v_p \cdot T = \frac{4}{3} \cdot 0'16 \pi = 0'21 \pi \text{ m.}$

• $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{0'21 \pi}{0'16 \pi} = 1'31 \text{ rad/m}$

$y = A \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \Rightarrow -0'04 = 0'04 \cdot \cos(12'57t - 1'31x + \varphi_0)$

$\Rightarrow -1 = \cos(12'57 \cdot 0 - 1'31 \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow -1 = \cos \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \pi \text{ rad.}$

2021 JULIO B.2

Una onda transversal se propaga en una cuerda situada a lo largo del eje x. La propagación de la onda es en el sentido positivo del eje x. La expresión matemática de la onda en los instantes $t=0 \text{ s}$ y $t=2 \text{ s}$ es $y(x, 0) = 0,1 \cos(\pi - 4\pi x) \text{ m}$ e $y(x, 2) = 0,1 \cos(11\pi - 4\pi x) \text{ m}$, respectivamente, donde todas las magnitudes están expresadas en el SI de unidades. Calcule:

a) La frecuencia angular y la expresión matemática de la onda.

b) La velocidad de propagación de la onda y la aceleración máxima de oscilación de un punto de la cuerda.

a) k = negativo porque va en sentido positivo del eje x.

• En $t=0 \Rightarrow y = 0'1 \cdot \cos(\pi - 4\pi x) \Rightarrow \varphi_0 = \pi \text{ rad}; A = 0'1 \text{ m}; k = 4\pi \text{ rad/m.}$

• En $t=2 \text{ s} \Rightarrow y = 0'1 \cdot \cos(11\pi - 4\pi x)$ donde $11\pi - 4\pi x = \omega \cdot 2 - 4\pi x + \pi$

$\Rightarrow 2\omega + \pi = 11\pi \Rightarrow 2\omega = 11\pi - \pi \Rightarrow 2\omega = 10\pi \Rightarrow \omega = 5\pi \text{ rad/s}$

• Expresión matemática de la onda: $y = A \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$

$\Rightarrow y = 0'1 \cdot \cos(5\pi t - 4\pi x + \pi) \text{ m}$

b) $v_p = \frac{\lambda}{T} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5\pi} = 0'4 \text{ s.} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0'5 \text{ m}$

$\Rightarrow v_p = \frac{0'5}{0'4} = 1'25 \text{ m/s}$

• Para obtener $a_{\text{máx}}$: ① $v = \frac{dy}{dt} = \frac{d(A \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0))}{dt} \Rightarrow v = -A\omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$

② $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = \frac{d(-A\omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0))}{dt} \Rightarrow a = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$

Para que la aceleración sea máxima, el $\cos(\omega t - kx + \varphi_0) = \pm 1$

$\Rightarrow |a_{\text{máx}}| = A\omega^2 = 0'1 \cdot (5\pi)^2 \Rightarrow a_{\text{máx}} = 24'67 \text{ m/s}^2$

2021 JUNIO COINCIDENTES A.2

Una onda transversal se propaga en el sentido positivo del eje x con una velocidad de $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La onda tiene una amplitud de 2 cm y una frecuencia angular de $\pi/2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Si en el instante $t = 0 \text{ s}$ el punto situado en el origen de coordenadas tiene una aceleración máxima y positiva, calcule:

a) La expresión matemática de la onda.

b) La velocidad de oscilación de un punto situado en $x = 3 \text{ m}$ en el instante $t = 10 \text{ s}$.

a) k = en negativo porque va en sentido positivo del eje x.

$v_p = 2 \text{ m/s}$

$A = 0'02 \text{ m}$

$\omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$

En $t=0 \text{ s}, x=0 \text{ m}, y=0 \text{ m} \Rightarrow a_{\text{máx}} \oplus$

① $y = A \cdot \sin(\omega t \pm kx + \varphi_0) \quad \text{• Como } \omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow T = 4 \text{ s}$

• $v_p = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = v_p \cdot T \Rightarrow \lambda = 2 \cdot 4 = 8 \text{ m.}$



$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \text{ rad/m}$$

⑤ $y = 0'02 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}x + \varphi_0\right)$ • Para calcular φ_0 , $t=0$, $x=0$ e $y=0$.

$$\Rightarrow 0 = 0'02 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0 - \frac{\pi}{4} \cdot 0 + \varphi_0\right) \Rightarrow 0 = \sin \varphi_0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 0 \text{ rad } \checkmark \\ \varphi_0 = \pi \text{ rad } \times \end{cases}$$

Expresión matemática: $y = 0'02 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}x\right) \text{ m}$

b) En $x=3 \text{ m}$ en $t=10 \text{ s}$.

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d(A \sin(\omega t - kx + \varphi_0))}{dt} \Rightarrow v = A\omega \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \Rightarrow v = 0'02 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}x\right)$$

$$\Rightarrow v = 0'02 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 10 - \frac{\pi}{4} \cdot 3\right) = 0'021 \text{ m/s}$$

2021 JUNIO B.2

El valor del campo eléctrico asociado a una onda electromagnética que se propaga en un medio material en la dirección del eje x viene expresado por: $E(x, t) = 4 \cos(3,43 \cdot 10^{15}t - 1,52 \cdot 10^7 x) \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$, donde todas las magnitudes están expresadas en unidades del SI. Calcule:

a) La frecuencia y la longitud de onda asociadas a la onda electromagnética.

b) La velocidad de propagación de la onda y el índice de refracción del medio por el cual se propaga.

Dato: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

a) Tomando la fórmula $y = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$ y la comparamos con la que dan:

$$E = 4 \cdot \cos(3'43 \cdot 10^{15}t - 1'52 \cdot 10^7 x) \Rightarrow \omega = 3'43 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}; k = 1'52 \cdot 10^7 \text{ rad/m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3'43 \cdot 10^{15}} = 5'83 \cdot 10^{-16} \text{ s} \Rightarrow f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{5'83 \cdot 10^{-16}} = 5'5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{1'52 \cdot 10^7} = 1'32 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

b) $v_p = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v_p = \frac{1'32 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{5'83 \cdot 10^{-16} \text{ s}} \Rightarrow v_p = 2'26 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

$$\text{Además } n = \frac{c}{v_p} \Rightarrow n = \frac{3 \cdot 10^8}{2'26 \cdot 10^8} \Rightarrow n = 1'33$$

2021 MODELO A.2

La potencia media transferida por una onda armónica en una cuerda viene dada por $P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v$, donde μ es la densidad lineal de masa de la cuerda, ω es la frecuencia angular, A es la amplitud y v es la velocidad de propagación de la onda. Una onda armónica expresada como $y(x, t) = 0,01 \sin(20\pi t - 5\pi x + \pi/2)$ (donde x e y están expresados en metros y t en segundos) se propaga por una cuerda cuya densidad lineal es de $2 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1}$. Calcule:

a) La longitud de onda y el periodo de la onda.

b) La potencia media que transfiere la onda y la energía que transmite la onda en un tiempo de 10 s.

a) Comparamos la ecuación que nos han dado: $y = 0'01 \cdot \sin(20\pi t - 5\pi x + \frac{\pi}{2})$

con la ecuación $y = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$.

• De aquí sacamos: $A = 0'01 \text{ m}$; $\omega = 20\pi \text{ rad/s}$; $k = 5\pi \text{ rad/m}$; $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\textcircled{1} v_p = \frac{\lambda}{T} \cdot \text{Como } \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20\pi} = 0'1 \text{ s} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{Como } k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{5\pi} = 0'4 \text{ m} \end{array} \right\} v_p = \frac{0'4}{0'1} = 4 \text{ m/s}$$

b) Densidad lineal $\mu = \frac{2 \text{ g}}{\text{cm}} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{1000 \text{ g}} \cdot \frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 0'2 \text{ kg/m}$

$$\textcircled{2} \text{ Como } P = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot \omega^2 \cdot A^2 \cdot v \Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot 0'2 \cdot (20\pi)^2 \cdot 0'01^2 \cdot 4 = 0'16 \text{ W}$$

$$\textcircled{3} \text{ Como } P = \frac{E}{t} \Rightarrow E = P \cdot t = 0'16 \cdot 10 = 1'6 \text{ J}$$

2020 SEPTIEMBRE B.2

Un oscilador armónico de frecuencia 1000 Hz genera en una cuerda una onda transversal que se propaga en el sentido positivo del eje x, con una longitud de onda de 1,5 m. La velocidad máxima de oscilación de un punto de la cuerda es de 100 m s^{-1} . Además, para un punto de la cuerda situado en $x = 0 \text{ m}$ y en el instante $t = 600 \mu\text{s}$, la elongación de la onda es de 1 cm y su velocidad de oscilación es positiva.

a) Determine la velocidad de propagación y la amplitud de la onda.

b) Halle la fase inicial y escriba la expresión matemática que representa dicha onda.

a) $f = 1000 \text{ Hz}$ k : negativo porque va en sentido positivo del eje x:

$$\lambda = 1,5 \text{ m}$$

$$v_{\text{máx}} = 100 \text{ m/s.}$$

$$\text{En } t = 600 \cdot 10^{-6} \text{ s} \Rightarrow x = 0 \text{ m}, y = 0,01 \text{ m} \text{ y } v = \oplus$$

$$\textcircled{1} \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \text{Como } f = \frac{1}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 1000 = 2000\pi \text{ rad/s}$$

$$\textcircled{2} \text{ La velocidad es máxima cuando } \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = 1 \Rightarrow v = A\omega \cdot \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \Rightarrow v_{\text{máx}} = A \cdot \omega$$

$$\Rightarrow v_{\text{máx}} = A \cdot \omega \Rightarrow A = \frac{v_{\text{máx}}}{\omega} = \frac{100}{2000\pi} = \boxed{0,016 \text{ m}}$$

$$\textcircled{3} v_p = \frac{\lambda}{T} \cdot \text{Como } f = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1000} = 0,001 \text{ s}$$

$$\Rightarrow v_p = \frac{1,5}{0,001} = \boxed{1500 \text{ m/s}}$$

b) $\textcircled{1} y = A \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi_0) \Rightarrow y = 0,016 \cdot \sin(2000\pi t - 1,33\pi x + \varphi_0)$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1,5} = 1,33\pi \text{ rad/m}$$

$$\textcircled{2} \text{ En } t = 600 \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad x = 0 \text{ m} \quad y = 0,01 \text{ m} \Rightarrow 0,01 = 0,016 \cdot \sin(2000\pi \cdot 600 \cdot 10^{-6} - 1,33\pi \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\Rightarrow 0,625 = \sin(3,77 + \varphi_0) \quad \begin{cases} 1^\circ \text{C: } 3,77 + \varphi_0 = 0,68 \Rightarrow \varphi_0 = -3,09 \text{ rad} \\ 2^\circ \text{C: } 3,77 + \varphi_0 = \pi - 0,68 \Rightarrow \varphi_0 = -1,3 \text{ rad.} \end{cases}$$

$\textcircled{3}$ Tenemos que cumplir la condición de que la velocidad sea positiva:

$$v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow v = \frac{d(A \sin(\omega t - kx + \varphi_0))}{dt} \Rightarrow v = A\omega \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\cdot \text{Para } \varphi_0 = -3,09 \text{ rad} \Rightarrow v = 0,016 \cdot 2000\pi \cdot \cos(2000\pi \cdot 600 \cdot 10^{-6} - 1,33\pi \cdot 0 - 3,09) = 78,17 \text{ m/s} \checkmark$$

$$\cdot \text{Para } \varphi_0 = -1,3 \text{ rad} \Rightarrow v = 0,016 \cdot 2000\pi \cdot \cos(2000\pi \cdot 600 \cdot 10^{-6} - 1,33\pi \cdot 0 - 1,3) = -78,69 \text{ m/s}$$

Así que: $\varphi_0 = -3,09 \text{ rad}$ y la expresión matemática: $y = 0,016 \cdot \sin(2000\pi t - 1,33\pi x - 3,09) \text{ m}$

2020 JULIO COINCIDENTES B.2

Una onda transversal que se propaga a lo largo de una cuerda en la dirección del eje x en sentido positivo tiene un periodo de 0,4 s y una longitud de onda de 1 m. En el instante $t = 0$ la partícula situada en la posición $x = 0$ tiene un desplazamiento vertical de -0,1 m y una velocidad de oscilación nula. Determine:

a) La expresión matemática de la onda.

b) La velocidad de oscilación de la partícula situada en el punto $x = 0,4 \text{ m}$ en el instante $t = 2 \text{ s}$.

a) k : negativo porque va en sentido positivo del eje x.

$$T = 0,4 \text{ s}$$

$$\lambda = 1 \text{ m}$$

$$\text{En } t = 0 \text{ s}, x = 0 \text{ m}, y = -0,1 \text{ m}; v = 0 \text{ m/s}$$

$$\textcircled{1} y = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0) \quad \cdot \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,4} = 5\pi \text{ rad/s} \quad \cdot k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad/m}$$

$\textcircled{2}$ La velocidad es nula cuando el desplazamiento es máximo, por tanto, $A = 0,1 \text{ m}$.

③ $y = 0'1 \cdot \sin(5\pi t - 2\pi x + \varphi_0)$ • Para sacar φ_0 utilizamos los datos iniciales:

$$\rightarrow -0'1 = 0'1 \cdot \sin(5\pi \cdot 0 - 2\pi \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow -1 = \sin \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

④ Expresión matemática de la onda: $y = 0'1 \cdot \sin(5\pi t - 2\pi x + \frac{3\pi}{2}) \text{ m}$

b) En $t=2\text{s}$ y $x=0'4\text{m}$

$$v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow v = \frac{d(A \sin(\omega t - kx + \varphi_0))}{dt} \Rightarrow v = A\omega \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \Rightarrow v = 0'1 \cdot 5\pi \cdot \cos(5\pi t - 2\pi x + \frac{3\pi}{2})$$

$$\Rightarrow v = 0'1 \cdot 5\pi \cdot \cos(5\pi \cdot 2 - 2\pi \cdot 0'4 + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow v = -0'92 \text{ m/s}$$

2020 JULIO A.2

Una onda armónica unidimensional, que se propaga en un medio con una velocidad de 400 m s^{-1} , está descrita por la siguiente expresión matemática: $y(x, t) = 3 \sin(kx - 200\pi t + \varphi_0)$ cm donde x e y están en m y s, respectivamente. Sabiendo que $y(0,0) = 1,5 \text{ cm}$ y que la velocidad de oscilación en $t=0$ y $x=0$ es positiva, halle:

a) El número de onda k y la fase inicial φ_0 .

b) La aceleración máxima de oscilación de un punto genérico del eje x .

a) $v_p = 400 \text{ m/s}$ • $y(x, t) = 3 \sin(kx - 200\pi t + \varphi_0) \Rightarrow$ si la comparamos con $y = A \sin(\omega t \pm kx + \varphi_0)$ obtenemos $A = 3\text{cm}$; $\omega = 200\pi \text{ rad/s}$

• En $t=0\text{s}$ y $x=0\text{m}$, $y = 0'015 \text{ m}$, $v > 0$.

$$\textcircled{1} v_p = \frac{\lambda}{T} \text{ o } v_p = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{200\pi}{400} = 0'5\pi \text{ rad/m}$$

② Para sacar φ_0 , utilizamos los datos del momento inicial:

$$1'5 = 3 \cdot \sin(k \cdot 0 - 200\pi \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow 0'5 = \sin \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 \begin{cases} 1^\circ \text{C } \varphi_0 = 0'52 \text{ rad} \\ 2^\circ \text{C } \varphi_0 = 2'62 \text{ rad} \end{cases}$$

③ Para elegir φ_0 , nos han dicho que la velocidad es positiva:

$$v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow v = \frac{d(3 \sin(kx - 200\pi t + \varphi_0))}{dt} \Rightarrow v = 3 \cdot (-200\pi) \cdot \cos(kx - 200\pi t + \varphi_0)$$

$$\Rightarrow v = -600\pi \cdot \cos(0'5\pi x - 200\pi t + \varphi_0)$$

$$\bullet \text{ Para } \varphi_0 = 0'52 \text{ rad} \Rightarrow v = -600\pi \cdot \cos(0'5\pi \cdot 0 - 200\pi \cdot 0 + 0'52) \Rightarrow v = -1635'8 \text{ X No}$$

$$\bullet \text{ Para } \varphi_0 = 2'62 \text{ rad} \Rightarrow v = -600\pi \cdot \cos(0'5\pi \cdot 0 - 200\pi \cdot 0 + 2'62) \Rightarrow v = 1634'3 \text{ ✓ si}$$

La fase inicial es $\varphi_0 = 2'62 \text{ rad}$

$$\text{b) } a_{\text{máx}} \quad \textcircled{1} a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = \frac{d(-600\pi \cdot \cos(0'5\pi x - 200\pi t + 2'62))}{dt}$$

$$\Rightarrow a = -600\pi \cdot (-200\pi) \cdot (-\sin(0'5\pi x - 200\pi t + 2'62)) \Rightarrow a = -120.000\pi^2 \cdot \sin(0'5\pi x - 200\pi t + 2'62)$$

La aceleración es máxima cuando el seno toma su mayor valor ± 1 .

Por tanto, en valor absoluto: $a_{\text{máx}} = 120.000\pi^2 \Rightarrow a_{\text{máx}} = 1'18 \cdot 10^6 \text{ cm/s}^2$

2020 MODELO A.2

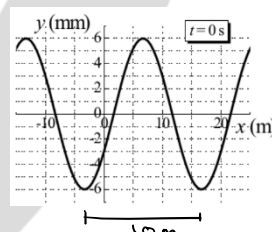
Una onda armónica unidimensional se propaga a lo largo del sentido positivo del eje x con una velocidad de propagación de $1500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ donde la gráfica adjunta muestra la elongación de la onda para el instante $t=0\text{s}$.

a) Determine el número de onda y la frecuencia angular de dicha onda.

b) Obtenga la expresión matemática que represente dicha onda.

a) k : negativa porque va en sentido positivo del eje x .

$$v_p = 1500 \text{ m/s}$$





• En la gráfica se ve que $\lambda = 10\text{ m}$. Y que en $t=0\text{ s}$, $x=0\text{ m}$ e $y=-0'003\text{ m}$.

$$\textcircled{1} k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{10} = 0'2\pi \text{ rad/m} \quad \textcircled{2} v_p = \frac{\lambda}{T} \text{ o } v_p = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = v_p \cdot k = 1500 \cdot 0'2\pi$$

$$\omega = 300\pi \text{ rad/s}$$

b) $y = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$ • De la gráfica sacamos $A = 6\text{ mm} = 0'006\text{ m}$

$$\Rightarrow y = 0'006 \cdot \sin(300\pi t - 0'2\pi x + \varphi_0)$$

• Para sacar φ_0 , cogemos los datos del momento inicial: $t=0\text{ s}$, $x=0\text{ m}$, $y=-0'003\text{ m}$

$$\Rightarrow -0'003 = 0'006 \cdot \sin(300\pi \cdot 0 - 0'2\pi \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow -0'5 = \sin \varphi_0$$

$$\varphi = \arcsen -0'5 \begin{cases} \frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ -\frac{\pi}{6} \text{ rad} \end{cases}$$

• Averiguamos cuál nos vale: Como no tenemos datos del signo de la velocidad, voy a coger un punto cualquiera y comprobar la elongación que me sale con la gráfica.

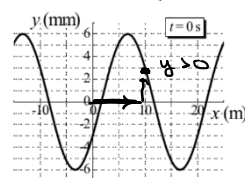
Ej: $t=0\text{ s}$, $x=$ $\Rightarrow$ debe salir la $y > 0$.

$$\text{• Para } \varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \Rightarrow y = 0'006 \cdot \sin(300\pi \cdot 0 - 0'2\pi \cdot 10 + \frac{\pi}{6}) = 0'003 \checkmark$$

si vale

$$\text{• Para } \varphi_0 = -\frac{\pi}{6} \text{ rad} \Rightarrow y = 0'006 \cdot \sin(300\pi \cdot 0 - 0'2\pi \cdot 10 - \frac{\pi}{6}) = -0'003 \times$$

No vale



Así que: $y = 0'006 \cdot \sin(300\pi t - 0'2\pi x + \frac{\pi}{6}) \text{ m}$