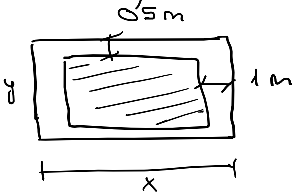
2023 MODELO B. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Un ayuntamiento ha dividido en parcelas parte del terreno municipal no urbanizable y lo ha cedido a los vecinos para su cultivo. Uno de los vecinos ha decidido que en su parcela asignada utilizará como huerto una zona rectangular de 72 metros cuadrados, dejando el resto para plantar frutales e instalar una caseta donde guardar las herramientas necesarias. La zona de huerto estará dividida en dos partes: la parte dedicada al cultivo de hortalizas será un rectángulo interior separado de los lados que delimitan el huerto. La separación será de medio metro entre cada uno de los lados de mayor longitud y un metro entre cada uno de los lados de menor longitud. La franja que delimita la zona de hortalizas la dedicará al cultivo de flores y plantas aromáticas.

a) (2 puntos) Calcule las dimensiones del huerto para que el área de la zona para el cultivo de hortalizas sea máxima.

b) (0.5 puntos) Calcule el área de la zona de cultivo de hortalizas.

a) $A = 72 m^2$



① $\begin{cases} x \cdot y = 72 \\ A_{CULTIVO} = (x-2)\cdot(y-1) \end{cases}$ ⇒ FUNCIÓN A OPTIMIZAR

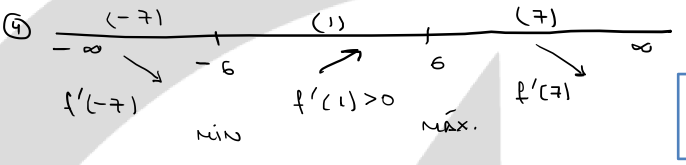
② $x \cdot y = 72 \Rightarrow x = \frac{72}{y}$ y sustituimos en la función a optimizar.

$A_c = \left(\frac{72}{y} - 2\right)\cdot(y-1) \Rightarrow A_c = 72 - \frac{72}{y} - 2y + 2$

$\Rightarrow A_c = -\frac{72}{y} - 2y + 74$

③ $A_c' = \frac{0\cdot y - (-72)\cdot 1}{y^2} - 2 \Rightarrow A_c' = \frac{72}{y^2} - 2 \Rightarrow \frac{72}{y^2} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{72}{y^2} = 2$

$\Rightarrow y^2 = \frac{72}{2} \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm\sqrt{36}$ ↗ $y = -6$ ✗ ↘ $y = 6$ ✓

④


• Como $x = \frac{72}{y} = \frac{72}{6} = 12 m$

$\boxed{\text{• El área será máxima cuando } x = 12 m \text{ e } y = 6 m.}$

b) $A_{CULTIVO} = (x-2)\cdot(y-1) = (12-2)\cdot(6-1) = 10 \cdot 5 = \boxed{50 m^2}$

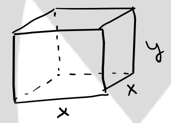
2021 JUNIO COINCIDENTES A. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Se quiere construir un acuario con forma de paralelepípedo recto, con tapa y base cuadrada. La tapa es de metacrilato, la base es de un material metálico y las caras verticales, de cristal. El metacrilato tiene un precio de 15 euros/m^2, el material metálico de 90 euros/m^2, y el cristal de 25 euros/m^2.

a) (0,75 puntos) Exprese la altura del acuario en función del lado de la base, x, y del coste total del material utilizado, C.

b) (1,75 puntos) Con un presupuesto de 1260 euros, ¿cuál es el volumen máximo del acuario que se puede construir con estas características?

a)



TAPA = METACRILATO 15 €/m^2
BASE = PLÁSTICO 90 € /m^2
CARAS = CRISTAL 25 €/m^2
C = COSTE TOTAL

$C = x^2 \cdot 90 + x^2 \cdot 15 + 4xy \cdot 25$

$C = 105x^2 + 100xy$

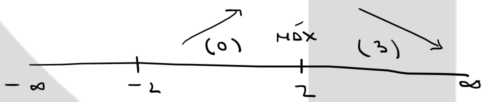
$\boxed{y = \frac{C - 105x^2}{100x}}$

b) $C = 1260$ € $\Rightarrow y = \frac{1260 - 105x^2}{100x}$

$V = Ab \cdot h \Rightarrow V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2 \cdot \frac{1260 - 105x^2}{100x} \Rightarrow V = \frac{1260x - 105x^3}{100}$

$V = \frac{1260x}{100} - \frac{105x^3}{100} \Rightarrow V' = 0 \Rightarrow \frac{1260}{100} - \frac{315x^2}{100} = 0 \Rightarrow 1260 - 315x^2 = 0$

$\Rightarrow 315x^2 = 1260 \qquad x^2 = 4$ ↗ $x = 2$ ↘ $x = -2$ (NO VALE)



$V'(0) > 0$ ↗
$V'(3) < 0$ ↘

• Si $x = 2 m \Rightarrow y = \frac{1260 - 105 \cdot 2^2}{100 \cdot 2}$

$\boxed{y = 4'2 m}$

• $V = 2^2 \cdot 4'2 = \boxed{16'8 m^3}$

2020 SEPTIEMBRE B.1 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.
a) (0,5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.
b) (0,75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.
c) (1,25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante t, $E(t)$ se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre en el instante $t = 0$ y en el instante $t = 2$.

a) $\lim_{x\to\infty} 25t\cdot e^{-t^2/4} = \infty\cdot 0$ IND $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{25t}{e^{t^2/4}} = L'H = \lim_{x\to\infty} \frac{25}{\frac{2t}{4}\cdot e^{t^2/4}} = \boxed{0}$

b) $P'(t)=0 \Rightarrow P'(t) = 25\cdot e^{-t^2/4} + 25t\cdot\frac{-2t}{4}\cdot e^{-t^2/4} = 0$

$e^{-t^2/4}\cdot\left(25 - \frac{50t^2}{4}\right) = 0$ $\nearrow$ $e^{-t^2/4}=0$ ✗ ; $\searrow$ $25 - \frac{50t^2}{4}=0 \Rightarrow 50t^2=100 \Rightarrow$

$t=\pm\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{t=\sqrt{2}\ s}$

$-\infty$ $-\sqrt{2}$ $(0)\nearrow$ $\sqrt{2}$ $(3)\searrow$ ∞

$P'(0)>0$ $P'(3)<0$

Máx

• $P(\sqrt{2}) = 25\cdot\sqrt{2}\cdot e^{-\sqrt{2}^2/4} = \boxed{21'44 \text{ Potencia máxima}}$

c) $E'(t) = P(t) = 25t\cdot e^{-t^2/4}$ y $E(0)=0$

$E(t) = \int 25t\cdot e^{-t^2/4}\,dt = 25\int te^{-t^2/4}\,dt = 25(-2)\int -\frac{1}{2}t\,e^{-t^2/4}\,dt = -50e^{-t^2/4} + C$

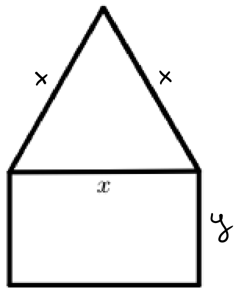
$E(t) = -50e^{-t^2/4} + C \Rightarrow 0 = -50e^{-0^2/4} + C \Rightarrow C = 50$

$\Rightarrow E(t) = -50e^{-t^2/4} + 50 \Rightarrow \Delta E = E(2) - E(0) = -50e^{-2^2/4} + 50 - (-50e^{-0^2/4} + 50)$

$= -50e^{-1} + 50 + 50 - 50 = \boxed{31'61 \text{ energía producida}}$

2020 JULIO COINCIDENTES B.2 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Disponemos de 10 metros de una barra metálica. Con ella queremos construir una estructura formada por un rectángulo que está rematado por arriba por un triángulo equilátero. La base del triángulo coincide con el lado superior del rectángulo, como se observa en la figura. Para construir la estructura, se cortan 6 trozos de la barra original de longitudes adecuadas y se sueldan para obtener la forma pedida.
Se pide:
a) (0,5 puntos) Si denotamos por x la base del triángulo, calcular la altura en función de x.
b) (2 puntos) Determinar cómo debemos cortar la barra original para que la estructura resultante encierre un área total máxima.



a) x x h x

$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{4x^2 - x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$

$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \boxed{\frac{x\sqrt{3}}{2}}$

b) • RECTÁNGULO: $4x + 2y = 10 \Rightarrow 2y = 10 - 4x \Rightarrow y = 5 - 2x$

• $A_{MÁX} = A_{RECTÁNGULO} + A_{TRIÁNGULO} \Rightarrow A_{MÁX} = x\cdot y + \frac{x\cdot\frac{x\cdot\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow A_{MÁX} = x\cdot(5-2x) + \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow A_{MÁX} = 5x - 2x^2 + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \Rightarrow A'_{MÁX} = 5 - 4x + \frac{2\sqrt{3}x}{4} \Rightarrow A'_{MÁX} = 5 - 4x + \frac{\sqrt{3}x}{2}$

$A'_{MÁX} = 0 \Rightarrow 5 - 4x + \frac{\sqrt{3}x}{2} = 0 \Rightarrow 10 - 8x + \sqrt{3}x = 0 \Rightarrow -8x + \sqrt{3}x = -10 \Rightarrow x\cdot(-8+\sqrt{3}) = -10$

$\Rightarrow x = \frac{-10}{-8+\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{x = 1'60\ m}$

$-\infty$ $(0)\nearrow$ $1'60$ $(3)\searrow$ ∞

$A'(0)>0 \nearrow$ $A'(3)<0 \searrow$

Máx ✓

$y = 5 - 2\cdot 1'60 = \boxed{1'8\ m}$