2024 MODELO A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: z = 0$.

a) (1 punto) Halle una ecuación de la recta paralela al plano π cuya dirección sea perpendicular a r y que pase por el punto (1,1,1).

b) (1,5 puntos) Halle una ecuación de una recta que forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes con la recta r, que esté contenida en el plano π y que pase por el punto (0,0,0).

2024 MODELO B. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dados los puntos A(0, 0, 1), B(1, 1, 0), C(1, 0, -1), D(1, 1, 2), se pide:

a) (0,75 puntos) Comprobar que los puntos A, B, C y D no son coplanarios y hallar el volumen del tetraedro que forman.

b) (0,75 puntos) Hallar el área del triángulo que forman los puntos B, C y D y el ángulo $\widehat{B}$ del mismo.

c) (1 punto) Hallar uno de los puntos E del plano determinado por A, B y C tales que el cuadrilátero ABCE sea un paralelogramo. Hallar el área de dicho paralelogramo.

2023 MODELO A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Un depósito en forma de paralelepípedo, de base cuadrada ABCD, apoya completamente su base sobre una rampa en un local, quedando una arista superior pegada al techo. Se considera un sistema de ejes, con los semiejes positivos en un rincón del local. La arista inferior paralela a la que se apoya en el techo y no en su misma cara, tiene vértices de coordenadas A(1, 1, 1) y B(1, 3, 1). La ecuación del plano que contiene a la rampa es 4x − 3z = 1 y el vértice sobre el punto A es A' (1, 1, 6). Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular una ecuación del plano que contiene a las aristas AB y AA'.

b) (1 punto) Calcular los otros dos vértices, C y D, de la base.

c) (1 punto) Calcular el volumen del depósito.

2023 MODELO B.3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Se consideran las siguientes rectas:

- r, la recta que pasa por el punto P(1, 1, 2) y tiene como vector director $\vec{u}$ = (0, 1, 2);
- s, la recta de ecuaciones $s \equiv \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$
- t, la recta paralela a s que contiene al punto P.

a) (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de r y s.

b) (0.75 puntos) Calcule el ángulo que forman las rectas r y t.

c) (1 punto) Calcule la proyección ortogonal del punto P sobre la recta s.

2022 JUNIO COINCIDENTE A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto P(1, 1, 0).

a) (1 punto) Halle los puntos pertenecientes a la recta r que distan de P una unidad.

b) (1.5 puntos) Halle unas ecuaciones de las rectas que pasan por P, son perpendiculares a r y forman un ángulo $\frac{\pi}{3}$ radianes con la normal al plano $x = 0$.

2022 JUNIO COINCIDENTE B. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos).

a) (0.5 puntos) Calcule el ángulo formado por los vectores $\vec{u}(0,0,1)$ y $\vec{v}(0,1,\sqrt{3})$.

b) (1 punto) Sea O el origen de coordenadas, y los puntos $A(2,0,0), B(0,3,0)$ y $C(0,2,2\sqrt{3})$. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por las tres aristas concurrentes $\overline{OA}, \overline{OB}$ y $\overline{OC}$.

c) (1 punto) Calcule una ecuación de la recta perpendicular común a las rectas r y s, siendo r la recta que pasa por O y por C y s la recta de ecuaciones $y - 3 = 0, z = 0$.

2022 JUNIO A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Con un dispositivo láser situado en el punto P(1, 1, 1) se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$.

a) (0.5 puntos) Calcule un vector directo de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano z=0.

b) (1.25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.

c) (0,75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r.

2022 JUNIO B. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos).

Sean el plano $\pi \equiv$ x + y + z = 1, y la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$., y el punto P(0, 1, 0).

a) (0.5 puntos) Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.

b) (0,75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1.

c) (1.25 puntos) Calcule una ecuación de la recta r_2, que pase por P y sea paralela a r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2.

2022 MODELO A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Una sonda planetaria se lanza desde el punto P(1, 0, 2) y sigue una trayectoria rectilínea que pasa por el punto Q(3, 1, 0) antes de impactar en una zona plana de la superficie del planeta, que tiene por ecuación π ≡ 2x − y + 2z + 5 = 0. Se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular las coordenadas del punto de impacto y el coseno del ángulo entre la trayectoria de la sonda y el vector normal al plano π.

b) (1 punto) Sabiendo que la alarma de proximidad se dispara antes de llegar a la superficie cuando la distancia al planeta es 1, determinar en qué punto estará la sonda al sonar la alarma.

2022 MODELO B. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos).

Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 3z = 6$, $\pi_2 \equiv 3x - z = 2$ y el punto A(1, 7, 1), se pide:

a) (0.5 puntos) Comprobar que π_1 y π_2 son perpendiculares.

b) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga una cara en el plano π_1, otra cara en el plano π_2, y un vértice en el punto A.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de π_1.

2021 JULIO A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dado el punto A(1, 0, -1), la recta $r \equiv x - 1 = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x + y - z = 6$, se pide:

a) (0,75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

b) (0,75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π.

c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.

2021 JULIO B. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x + z = 2 \\ -2x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Escriba la ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.

b) (1 punto) Calcule la distancia entre a r y s.

2021 JUNIO COINCIDENTES A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Desde el punto $P_1 = (1, 1, -1)$ se ha trazado una recta, r, perpendicular a un plano, π. El punto de intersección del plano con la recta es $P_2 = (0, 0, 0)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación de la recta r.

b) (1 punto) Hallar una ecuación del plano π.

c) (0,5 puntos) Hallar la distancia de P_1 al plano π.

2021 JUNIO COINCIDENTES B. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

En un laboratorio se lanza un rayo láser desde el punto $P(2,3,-5)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (-1,-2,2)$, para que impacte en una placa metálica plana de ecuación $\pi \equiv 3x - 2y - 2z = 1$, con el fin de perforar un orificio.

a) (0,75 puntos) Calcule las coordenadas del punto de impacto.

b) (0,75 puntos) Si el ángulo entre el láser y el plano es menor a $45°$, el rayo será reflejado y no se realizará el orificio. Determine si ese es el caso.

c) (1 punto) Para optimizar la velocidad de perforación, se decide lanzar un rayo desde P en dirección perpendicular a π, y lanzar simultáneamente otro rayo, también perpendicular a π , desde un punto situado al otro lado del plano y a la misma distancia de π que de P ¿Dónde habría que situar el origen del segundo rayo para que ambos impacten en el mismo punto del plano?

2021 JUNIO A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos).

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π.

b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano z – y = 0.

c) (0,75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

2021 JUNIO B. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos).

Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

a) (1,5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b) (0,5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto (0, 2, 0) y es perpendicular al plano π_2.

c) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y.

2021 MODELO A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos).

Se consideran los puntos $A(3,1,2), B(0,3,4)$ y $P(-1,1,0)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Determinar las coordenadas de un punto Q sabiendo que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente independientes, tienen sentidos opuestos y tienen el mismo módulo.

b) (1 punto) Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta r que contiene a A y P, y de la recta s que contiene a B y al punto $C(2,-1,-2)$.

c) (0,75 puntos) Calcular el coseno del ángulo formado por $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$.

2021 MODELO B. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos).

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

a) (0,75 puntos) Hallar la distancia del origen a la recta s.

b) (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de r y s.

c) (1,25 puntos) Escribir la ecuación de una recta perpendicular común a ambas rectas.

2020 SEPTIEMBRE A.3 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dado el punto P(3, 3, 0), la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.

b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r.

c) (0,75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recta en A.

2020 SEPTIEMBRE B.3 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Del paralelogramo ABCD, se conocen los vértices consecutivos $A(1,0,-1), B(2,1,0)\ y\ C(4,3,-2)$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

c) (0,5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

2020 JULIO COINCIDENTE A.3 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Se consideran los puntos $A(0,-4,2), B(3,-2,3)\ y\ C(-1,-3,3)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Comprobar que el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo, indentificando los catetos y la hipotenusa.

b) (0,75 puntos) Determinar una ecuacion del plano π que contiene a los tres puntos.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por los puntos B y C.

2020 JULIO COINCIDENTE B.3 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$ y la recta s que pasa por $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ y tiene dirección $(-1,1,0)$ se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar la posición relativa de ambas rectas.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de un plano que contiene a la recta r y a un vector perpendicular a r y a s.

c) (1 punto) Encontrar una perpendicular común a r y a s.

2020 JULIO A.3 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P(2, -1, 5).

c) (1,25 puntos) Encontrar la ecuación de un plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

2020 JULIO B.3 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dados los puntos $P(-3,1,2)\ y\ Q(-1,0,1)$ y el plano π ≡ x + 2y - 3z = 4. Se pide:

a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π.

b) (0,5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.

c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

2020 MODELO A.3 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}, \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases},$ se pide:

a) (1,5 puntos) Estudiar la posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte entre la recta r_2 y el plano que contiene a r_1 y que pasa por el origen de coordenadas.

2020 MODELO B.3 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dados los puntos $A(1,1,-2)\ y\ B(3,-1,4)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular el área del triángulo OPQ, siendo $O(0,0,0)$, P el punto medio del segmento AB y Q la intersección de la recta que pasa por A y B y el plano π ≡ z = 7.

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r.

c) (0,5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta r y la recta que pasa por A y B.