

2023 MODELO B.5 (2 puntos)

Para estimar la proporción de estudiantes de una determinada facultad que utilizan la cafetería se toma una muestra de estudiantes al azar.

a) Sabiendo que la proporción poblacional es $p = 0,55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de estudiantes para garantizar que, con una confianza del 98,02 %, el margen de error en la estimación no supera el 10 %.

b) Si la muestra aleatoria fue de 100 estudiantes, de los cuales 70 utilizaban la cafetería, determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de estudiantes que utilizan la cafetería.

a) $p = 0,55$ utilizan la cafetería.

① $\alpha = 1 - nc = 1 - 0,9802 = 0,0198$

$q = 1 - p = 1 - 0,55 = 0,45$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0,9802 + \frac{0,0198}{2} = 0,9901$

$E = 0,1$

$nc = 0,9802$

$z_{\alpha/2} = 2,33$

② $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow \frac{E}{z_{\alpha/2}} = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow \frac{E^2}{z_{\alpha/2}^2} = \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow E^2 \cdot n = z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot q$

$\Rightarrow n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot q}{E^2} \Rightarrow n = \frac{2,33^2 \cdot 0,55 \cdot 0,45}{0,1^2} = 134,37 \Rightarrow n = 135 \text{ estudiantes, la mínima muestra}$

b) $n = 100$ $p = \frac{70}{100} = 0,7$

① $\alpha = 1 - nc = 0,05$

$q = 1 - p = 0,3$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0,95 + \frac{0,05}{2} = 0,975 \text{ TABLA} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

$nc = 0,95$

② $I.C. \left(p - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} ; p + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \right)$

$I.C. \left(0,7 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{100}} ; 0,7 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{100}} \right) = (0,6102 ; 0,7698)$

2022 JUNIO COINCIDENTES A.5 (2 puntos)

Para estimar la proporción poblacional de las familias que tienen internet en una determinada ciudad se ha tomado una muestra de familias al azar.

a) Si la proporción poblacional fuese $P = 0,8$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de familias para garantizar que, con una confianza del 99%, el margen de error en la estimación no supera el 6%.

b) Tomada al azar una muestra de 200 familias, se encontró que 170 tenían internet. Determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de familias que tienen internet.

a) $p = 0,8$ $q = 1 - p = 0,2$

$nc = 0,99$

$E = 0,06$

① $nc + \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0,01$

$P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0,99 + \frac{0,01}{2} = 0,995$

$P(z_{\alpha/2} < K) = 0,995 \Rightarrow \text{TABLA} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$

② $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2,575 \cdot \sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{n}} = 0,06$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{0,8 \cdot 0,2}{n}} = \frac{0,06}{2,575} \Rightarrow \frac{0,8 \cdot 0,2}{n} = \left(\frac{0,06}{2,575} \right)^2 \Rightarrow n = \frac{0,8 \cdot 0,2}{\left(\frac{0,06}{2,575} \right)^2}$

$\Rightarrow n = 294,71$

Para que el error no supere el 6%, la muestra debe ser de 295.

b) $n = 200$ $p = \frac{170}{200} = 0,85$ $q = 1 - p = 0,15$

$nc = 0,95 \Rightarrow \alpha = 1 - nc = 1 - 0,95 = 0,05 \Rightarrow P(z_{\alpha/2} < K) = nc + \frac{\alpha}{2} = 0,95 + \frac{0,05}{2}$

$\Rightarrow P(z_{\alpha/2} < K) = 0,975 \text{ TABLA} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

• INTERVALO DE CONFIANZA

$I.C. \left(\hat{p} - E ; \hat{p} + E \right) \quad E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \Rightarrow E = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,85 \cdot 0,15}{200}} = 0,0495$

$\Rightarrow I.C. (0,85 - 0,0495 ; 0,85 + 0,0495) = (0,8005 ; 0,8995)$

2021 JUNIO COINCIDENTE B.5 (2 puntos)

Para que una determinada marca de chocolate estudie entre sus clientes la demanda de sus cajas de bombones, se desea estimar la proporción de cajas grandes en relación al número de cajas de bombones vendidas, P.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de la demanda es $P = 0,2$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de ventas de cajas de bombones para garantizar que, con una confianza del 99%, el margen de error en la estimación no supera el 8%.

b) tomada al azar una muestra de 200 cajas de bombones vendidas, se encontró que 25 habían sido cajas grandes. Determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de cajas grandes en relación a la venta total de cajas de bombones.

a) $p = 0.2$ $q = 1 - p = 0.8$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{¿n?} \\ n.c = 0.99 \\ E = 8\% = 0.08 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} n.c + d = 1 \Rightarrow d = 1 - 0.99 = 0.01 \\ P(z_{\alpha/2} < K) = n.c + \frac{d}{2} = 0.99 + \frac{0.01}{2} = 0.995 \Rightarrow \text{TABLA} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575 \\ \textcircled{2} E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \Rightarrow 0.08 = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{n}} \Rightarrow \frac{0.08}{2.575} = \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{n}} \\ \Rightarrow 0.0311 = \sqrt{\frac{0.16}{n}} \Rightarrow 0.0311^2 = \frac{0.16}{n} \Rightarrow n = \frac{0.16}{0.0311^2} = 165.42 \end{array}$

Para que el error no supere el 8%, la muestra debe ser de 166.

b) $n = 200$ $p = \frac{25}{200} = 0.125$ $q = 1 - p = 0.875$ $\left\{ \begin{array}{l} n.g = 25 \\ n.c = 0.95 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} d = 1 - n.c = 1 - 0.95 = 0.05 \\ P(z_{\alpha/2} < K) = n.c + \frac{d}{2} = 0.95 + \frac{0.05}{2} = 0.975 \Rightarrow \text{TABLA} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96 \\ \textcircled{2} E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.125 \cdot 0.875}{200}} = 0.04583 \\ \textcircled{3} I.C(\hat{p} - E; \hat{p} + E) = (0.125 - 0.04583; 0.125 + 0.04583) = (0.079; 0.171) \end{array}$

2021 JUNIO A.5 (2 puntos)

Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años:

a) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen una cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96% para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.

b) Suponiendo que la proporción poblacional es $P = 0.5$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95%, el margen de error en la estimación no supere el 5%.

a) $n = 500$ $p = \frac{320}{500} = 0.64$ $q = 1 - p = 0.36$ $\left\{ \begin{array}{l} n.c = 320 \\ n.c = 0.96 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} d = 1 - n.c = 1 - 0.96 = 0.04 \\ P(z_{\alpha/2} < K) = n.c + \frac{d}{2} = 0.96 + \frac{0.04}{2} = 0.98 \Rightarrow \text{TABLA} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.055 \\ \textcircled{2} E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.64 \cdot 0.36}{500}} = 0.044 \\ \textcircled{3} I.C(\hat{p} - E; \hat{p} + E) = (0.64 - 0.044; 0.64 + 0.044) = (0.596; 0.684) \end{array}$

b) $p = 0.5$ $q = 1 - p = 0.5$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{¿n?} \\ n.c = 0.95 \\ E = 0.05 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \textcircled{1} d = 1 - n.c = 1 - 0.95 = 0.05 \\ P(z_{\alpha/2} < K) = n.c + \frac{d}{2} = 0.95 + \frac{0.05}{2} = 0.975 \Rightarrow \text{TABLA} \\ z_{\alpha/2} = 1.96 \\ \textcircled{2} E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.96} = \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \\ \Rightarrow 0.0255 = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow 0.0255^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{0.0255^2} = 384.47 \end{array}$

Para que el error no supere el 5%, la muestra debe ser mínimo de 385.