

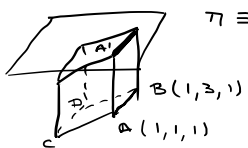
2023 MODELO A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Un depósito en forma de paralelepípedo, de base cuadrada ABCD, apoya completamente su base sobre una rampa en un local, quedando una arista superior pegada al techo. Se considera un sistema de ejes, con los semiejes positivos en un rincón del local. La arista inferior paralela a la que se apoya en el techo y no en su misma cara, tiene vértices de coordenadas A(1, 1, 1) y B(1, 3, 1). La ecuación del plano que contiene a la rampa es $4x - 3z = 1$ y el vértice sobre el punto A es A'(1, 1, 6). Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular una ecuación del plano que contiene a las aristas AB y AA'.

b) (1 punto) Calcular los otros dos vértices, C y D, de la base.

c) (1 punto) Calcular el volumen del depósito.

a)  $\pi \equiv 4x - 3z = 1 \Rightarrow A, B, C \text{ y } D \text{ pertenecen al plano } \pi.$

① $\vec{AB} = B - A = (0, 2, 0)$ $\vec{AA'} = A' - A = (0, 0, 5)$

② Obtenemos ecuación general del plano que pasa por A, A' y B:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 10(x-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - 1 = 0}$$

b) El vector $\vec{AC}$ es perpendicular a $\vec{AB}(0, 2, 0)$ y $\vec{n}_\pi(4, 0, -3)$

Debe ser proporcional a $\vec{n}_\pi \times \vec{AB} \Rightarrow \vec{AC} = \lambda \cdot (\vec{n}_\pi \times \vec{AB}) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \lambda \cdot (-6, 0, -8) = (-6\lambda, 0, -8\lambda)$

• Y sabemos que la base es un cuadrado $\Rightarrow |\vec{AC}| = |\vec{AB}| \Rightarrow \sqrt{(-6\lambda)^2 + 0^2 + (-8\lambda)^2} = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2}$
 $\Rightarrow 36\lambda^2 + 64\lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{4}{100} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{2}{10} = \pm \frac{1}{5}$

• Posible vector $\vec{AC} = \left(-\frac{6}{5}, 0, -\frac{8}{5}\right) \Rightarrow$ Como $\vec{AC} = C - A \Rightarrow C = \vec{AC} + A$

$\Rightarrow C = \left(-\frac{6}{5}, 0, -\frac{8}{5}\right) + (1, 1, 1) = \left(-\frac{1}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right)$ No vale porque la z es negativa y estaría por debajo del suelo del local

• Posible vector $\vec{AC} \left(\frac{6}{5}, 0, \frac{8}{5}\right) \Rightarrow C = \left(\frac{6}{5}, 0, \frac{8}{5}\right) + (1, 1, 1) = \left(\frac{11}{5}, 1, \frac{13}{5}\right) \checkmark$

• Hacemos lo mismo con D: $\vec{BD}(-6\lambda, 0, -8\lambda) \begin{matrix} \left(-\frac{6}{5}, 0, -\frac{8}{5}\right) \\ \left(-\frac{1}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right) \end{matrix}$

Como $\vec{BD} = D - B \Rightarrow D = \vec{BD} + B$

• $D = \left(-\frac{6}{5}, 0, -\frac{8}{5}\right) + (1, 3, 1) =$ No vale, la z es negativa.

• $D = \left(\frac{6}{5}, 0, \frac{8}{5}\right) + (1, 3, 1) = \left(\frac{11}{5}, 3, \frac{13}{5}\right)$

c) Volumen = $|\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AA'}| \Rightarrow V = \left| \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ \frac{6}{5} & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right| = |-12| = \boxed{12 \text{ u}^3}$

2023 MODELO B.3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Se consideran las siguientes rectas:

• r, la recta que pasa por el punto P(1, 1, 2) y tiene como vector director $\vec{u} = (0, 1, 2)$;

• s, la recta de ecuaciones $s \equiv \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$

• t, la recta paralela a s que contiene al punto P.

a) (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de r y s.

b) (0.75 puntos) Calcule el ángulo que forman las rectas r y t.

c) (1 punto) Calcule la proyección ortogonal del punto P sobre la recta s.

a) $P \in r(1, 1, 2); \vec{u}(0, 1, 2)$

• Pasamos la recta s a paramétrica: $z = \lambda \Rightarrow x - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow x = 2\lambda - 2$

$\Rightarrow x + y - 4 = 0 \Rightarrow 2\lambda - 2 + y - 4 = 0 \Rightarrow y = -2\lambda + 6$

$s \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 6 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad P_s(-2, 6, 0) \\ \vec{s}(2, -2, 1)$

• Hacemos vector $\vec{PP_s}(-3, 5, -2)$

• Hacemos $N^* \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_1 + 2F_2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4F_2 - F_3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \boxed{r(N^*) = 3 \text{ SE CRUZAN}}$

b) $\vec{r}(0, 1, 2)$ Como t es paralela a $s \Rightarrow \vec{E} = \vec{S}(2, -2, 1)$

$$\begin{aligned} |\vec{r} \cdot \vec{E}| &= |\vec{r}| \cdot |\vec{E}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow |(0, 1, 2) \cdot (2, -2, 1)| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \cos \alpha \\ \Rightarrow |0 - 2 + 2| &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{9} \cos \alpha \Rightarrow 0 = \cos \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 90^\circ} \end{aligned}$$

c) 
 ① Plano $\perp$ a s que contenga a P : $\vec{n}_\pi = \vec{S}(2, -2, 1)$
 $Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow 2x - 2y + z + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 2 + D = 0$
 $\Rightarrow D = -2 \Rightarrow \pi \equiv 2x - 2y + z - 2 = 0$

② Punto de corte entre plano π y s :

$$\begin{aligned} s \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 6 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} & \quad P_G(-2 + 2\lambda, 6 - 2\lambda, \lambda) \Rightarrow 2 \cdot (-2 + 2\lambda) - 2(6 - 2\lambda) + \lambda - 2 = 0 \\ \Rightarrow -4 + 4\lambda - 12 + 4\lambda + \lambda - 2 = 0 & \Rightarrow 9\lambda = 18 \Rightarrow \lambda = 2 \\ \Rightarrow P_G(-2 + 2 \cdot 2; 6 - 2 \cdot 2; 2) &= \boxed{(2, 2, 2)} \end{aligned}$$

2022 JUNIO COINCIDENTE A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y el punto $P(1, 1, 0)$.

a) (1 punto) Halle los puntos pertenecientes a la recta r que distan de P una unidad.

b) (1.5 puntos) Halle unas ecuaciones de las rectas que pasan por P , son perpendiculares a r y forman un ángulo $\frac{\pi}{3}$ radianes con la normal al plano $x = 0$.

a) $d(P, P_r) = 1 \Rightarrow |PP_r| = 1$ $P_r = P - P_r = (1, 1, 0) - (\lambda, \lambda, 0) = (1 - \lambda, 1 - \lambda, 0)$
 $r \begin{cases} \text{Perteneciente } (\lambda, \lambda, 0) \\ \vec{r}(1, 1, 0) \end{cases}$ $|PP_r| = \sqrt{(1 - \lambda)^2 + (1 - \lambda)^2 + 0^2}$
 Como $|PP_r| = 1 \Rightarrow \sqrt{(1 - \lambda)^2 + (1 - \lambda)^2 + 0^2} = 1 \Rightarrow (1 - \lambda)^2 + (1 - \lambda)^2 = 1^2$
 $\Rightarrow 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 = 1 \Rightarrow 2 - 4\lambda + 2\lambda^2 = 1 \Rightarrow 2\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$
 $\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

$\bullet P\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}, \frac{2 + \sqrt{2}}{2}, 0\right) \text{ y } P\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, 0\right)$

b) $P(1, 1, 0) \perp ar$ $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad con plano $x = 0 \Rightarrow \vec{n}_\pi = (1, 0, 0)$

Para recta s necesitamos $P(1, 1, 0)$
 $\vec{s}(x, y, z)$

① Como es $\perp ar \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{s} = 0$ $(1, 1, 0) \cdot (x, y, z) = 0 \Rightarrow \boxed{x + y = 0}$

② $|\vec{n}_\pi \cdot \vec{s}| = |\vec{n}_\pi| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow |(1, 0, 0) \cdot (x, y, z)| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \cos \frac{\pi}{3}$
 $\Rightarrow x = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{x}{\cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow 2x = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 $\Rightarrow 4x^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \boxed{3x^2 = y^2 + z^2}$

$$\begin{cases} x = -y \\ 3x^2 = y^2 + z^2 \end{cases}$$

DOS ECUACIONES, TRES INCÓGNITAS = HAY INFINITAS SOLUCIONES

$$y = \lambda \Rightarrow x = -\lambda \Rightarrow 3(-\lambda)^2 = \lambda^2 + z^2 \Rightarrow 2\lambda^2 = z^2 \Rightarrow z = \pm \sqrt{2}\lambda$$

El vector de $\vec{r}(-\lambda, \lambda, \pm\sqrt{2}\lambda)$

Como nos han pedido unas ecuaciones, le damos cualquier valor a λ . Por ejemplo $\lambda = 1$

$$\vec{r}(-1, 1, \pm\sqrt{2})$$

1ª opción

$$\vec{r} \equiv \frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$$

2ª opción

$$\vec{r} \equiv \frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z}{-\sqrt{2}}$$

2022 JUNIO COINCIDENTE B. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

a) (0.5 puntos) Calcule el ángulo formado por los vectores $\vec{u}(0, 0, 1)$ y $\vec{v}(0, 1, \sqrt{3})$.

b) (1 punto) Sea O el origen de coordenadas, y los puntos $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ y $C(0, 2, 2\sqrt{3})$. Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por las tres aristas concurrentes $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ y $\vec{OC}$.

c) (1 punto) Calcule una ecuación de la recta perpendicular común a las rectas r y s , siendo r la recta que pasa por O y por C y s la recta de ecuaciones $y - 3 = 0, z = 0$.

$$a) |\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow |(0, 0, 1) \cdot (0, 1, \sqrt{3})| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + \sqrt{3}^2} \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{4} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \alpha = 30^\circ$$

b) $O(0, 0, 0)$ $V = |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = 12\sqrt{3} \text{ u}^3$

$\vec{OA} = (2, 0, 0)$
 $\vec{OB} = (0, 3, 0)$
 $\vec{OC} = (0, 2, 2\sqrt{3})$

c) $r \begin{cases} O(0, 0, 0) \\ C(0, 2, 2\sqrt{3}) \end{cases} \quad \vec{r}(0, 2, 2\sqrt{3}) \quad s \equiv \begin{cases} y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda \quad z = 0 \quad y = 3$

$s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \quad \vec{s}(1, 0, 0)$

① Como buscamos una recta $\perp$ a r y s , necesitamos un vector $\perp$ a los vectores $\vec{r}$ y $\vec{s}$.

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 2\sqrt{3}, -2)$$

② Plano $\perp$ a s que contiene a r $\begin{cases} \vec{w}(0, 2\sqrt{3}, -2) \\ \vec{r}(0, 2, 2\sqrt{3}) \\ Pr(0, 0, 0) \end{cases} \quad \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2\sqrt{3} & -2 \\ 0 & 2 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4\sqrt{3} + 4)x - 0y - 0z = 0$

$(4\sqrt{3} + 4)x = 0 \Rightarrow x = 0 \equiv \pi_1$

③ Plano $\perp$ a r que contiene a s $\begin{cases} \vec{w}(0, 2\sqrt{3}, -2) \\ \vec{s}(1, 0, 0) \\ Ps(0, 3, 0) \end{cases} \quad \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z \\ 0 & 2\sqrt{3} & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

④ La recta $\perp \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + \sqrt{3}z = 3 \end{cases}$

$0x - 2(y - 3) - 2\sqrt{3}z = 0 \Rightarrow -2y + 6 - 2\sqrt{3}z = 0$

$\pi_2 \equiv y + \sqrt{3}z = 3$

2022 JUNIO A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1, 1, 1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$

a) (0,5 puntos) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z=0$.

b) (1,25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.

c) (0,75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r .

a) $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow x = -90 + \lambda \Rightarrow 2(-90 + \lambda) - y = 10 \Rightarrow -180 + 2\lambda - 10 = y$

$y = 2\lambda - 190$

$r \equiv \begin{cases} x = -90 + \lambda \\ y = -190 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \vec{r}(1, 2, 1)$

Pto de corte entre r y π . Sustituimos ecuación paramétrica de r en π .

$z = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -90 + \lambda \\ y = -190 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -90 \\ y = -190 \\ z = 0 \end{cases} \quad P(-90, -190, 0)$

b) Láser $\rightarrow P(1, 1, 1)$

Trayectoria partícula $r \equiv \begin{cases} x = -90 + \lambda \\ y = -190 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{r}(1, 2, 1) \\ Pr(-90, -190, 0) \end{cases}$

① Plano $\perp$ a r que pasa por P .

$\begin{cases} P(1, 1, 1) \\ \vec{n}(1, 2, 1) \end{cases} \quad Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow x + 2y + z + D = 0 \Rightarrow 1 + 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -4$

$\Rightarrow \pi \equiv x + 2y + z - 4 = 0$

② Pto corte entre π y r : $-90 + \lambda + 2(-190 + 2\lambda) + \lambda - 4 = 0 \Rightarrow -94 + 2\lambda - 380 + 4\lambda = 0$

$\Rightarrow 6\lambda = 474 \Rightarrow \lambda = 79$



$$r \equiv \begin{cases} x = -90 + 79 = -11 \\ y = -190 + 279 = -32 \\ z = 79 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(-11, -32, 79)}$$

c) $\pi \equiv x + y = 2 \rightarrow \vec{n}(1, 1, 0)$; $r \rightarrow \vec{r}(1, 2, 1)$

$$|\vec{n} \cdot \vec{r}| = |\vec{n}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos \alpha \quad |(1, 1, 0) \cdot (1, 2, 1)| = \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow |1 + 2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos \alpha \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{12}} \quad \boxed{\alpha = 60^\circ}$$

2022 JUNIO B. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos).

Sean el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, y la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$, y el punto $P(0, 1, 0)$.

a) (0.5 puntos) Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.

b) (0.75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1 .

c) (1.25 puntos) Calcule una ecuación de la recta r_2 , que pase por P y sea paralela a r_1 . Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2 .

a) Introducimos r_1 en π : $x + y + z = 1 \Rightarrow 1 + \lambda + 1 - \lambda - 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \checkmark$

La recta pertenece al plano.

Introducimos P en π : $x + y + z = 1 \Rightarrow 0 + 1 + 0 = 1 \checkmark$

El punto P pertenece al plano.

b) $P(0, 1, 0)$

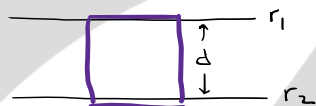
$\vec{n}_\pi(1, 1, 1)$
 $\vec{r}_1(1, -1, 0)$ } El vector de la recta debe ser perpendicular a $\vec{n}_\pi$ y $\vec{r}_1$.

$$\vec{w} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -2)$$

La recta es: $t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$

c) $P(0, 1, 0)$
 $\vec{r}_1(1, -1, 0) = \vec{r}_2$ } $r_2 \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{0}$

Como r_1 y r_2 son paralelas, el lado del cuadrado es la distancia entre las rectas.



$$d(r_1, r_2) = \frac{|\vec{P_1P_2} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{|(1, 1, 1)|}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{P_1P_2} = \vec{P_2} - \vec{P_1} = (0, 1, 0) - (1, 1, -1) = (-1, 0, 1) = \frac{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} u$$

$$A_{\text{AREA}} = l^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{6}{4} = \boxed{\frac{3}{2} u^2}$$

2022 MODELO A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Una sonda planetaria se lanza desde el punto $P(1, 0, 2)$ y sigue una trayectoria rectilínea que pasa por el punto $Q(3, 1, 0)$ antes de impactar en una zona plana de la superficie del planeta, que tiene por ecuación

$\pi \equiv 2x - y + 2z + 5 = 0$. Se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular las coordenadas del punto de impacto y el coseno del ángulo entre la trayectoria de la sonda y el vector normal al plano π .

b) (1 punto) Sabiendo que la alarma de proximidad se dispara antes de llegar a la superficie cuando la distancia al planeta es 1, determinar en qué punto estará la sonda al sonar la alarma.

a) Obtenemos recta r que pasa por P y Q .

$$\begin{matrix} P(1, 0, 2) & \vec{PQ} = (2, 1, -2) \\ Q(3, 1, 0) \end{matrix} \quad r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases} \quad P_G(1 + 2\lambda, \lambda, 2 - 2\lambda)$$

Sustituimos la recta r en π .

$$2(1 + 2\lambda) - \lambda + 2(2 - 2\lambda) + 5 = 0 \Rightarrow 2 + 4\lambda - \lambda + 4 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow -\lambda + 11 = 0 \quad \lambda = 11$$

Volvemos a r o al punto genérico P_G y sustituimos λ :

$$P_G(1 + 2 \cdot 11, 11, 2 - 2 \cdot 11) \quad \boxed{P_I(23, 11, -20)}$$

$$\vec{PQ} = (2, 1, -2)$$

$$\vec{n}(2, -1, 2)$$

$$|\vec{n} \cdot \vec{PQ}| = |\vec{n}| \cdot |\vec{PQ}| \cdot \cos \alpha$$

$$|(2, 1, -2) \cdot (2, -1, 2)| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \cos \alpha$$

$$|4 - 1 - 4| = \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} \cos \alpha \Rightarrow 1 = 9 \cos \alpha \quad \boxed{\cos \alpha = \frac{1}{9}}$$

b) $P_r = P_G(1+2\lambda, \lambda, 2-2\lambda)$

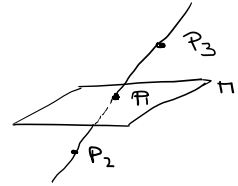
$\pi \equiv 2x - y + 2z + 5 = 0$

$d(P_r, \pi) = 1 \Rightarrow \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 1 \Rightarrow \frac{|1 - \lambda + 11|}{\sqrt{9}} = 1 \Rightarrow |1 - \lambda + 11| = 3$

• 1ª opción $- \lambda + 11 = 3 \Rightarrow - \lambda = -8 \Rightarrow \lambda = 8 \Rightarrow P_2(17, 8, -14)$

• 2ª opción $- \lambda + 11 = -3 \Rightarrow - \lambda = -14 \Rightarrow \lambda = 14 \Rightarrow P_3(29, 14, -26)$

Como P_1 tiene $y = 11$, buscamos un punto que esté antes de P_1 , es decir, que tenga mayor altura. Ese es $P_3(29, 14, -26)$



2022 MODELO B. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos).

Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 3z = 6$, $\pi_2 \equiv 3x - z = 2$ y el punto $A(1, 7, 1)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Comprobar que π_1 y π_2 son perpendiculares.

b) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga una cara en el plano π_1 , otra cara en el plano π_2 , y un vértice en el punto A.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de π_1 .

a) $\vec{n}_1(1, -2, 3)$ $\vec{n}_2(3, 0, -1)$ Serán perpendiculares si $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

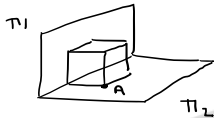
$(1, -2, 3) \cdot (3, 0, -1) = 3 - 3 = 0 \checkmark$

SON PERPENDICULARES

b) Miramos si el punto A pertenece a π_1 o π_2 :

$\pi_1 \equiv x - 2y + 3z = 6 \Rightarrow 1 - 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 6 \Rightarrow -10 \neq 6$ A no pertenece a π_1

$\pi_2 \equiv 3x - z = 2 \Rightarrow 3 \cdot 1 - 1 = 2 \Rightarrow 2 = 2 \checkmark$ A pertenece a π_2 .



Por tanto, la distancia de A al plano π_1 es lo que mide el lado del cuadrado.

$d(A, \pi_1) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 - 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{16}{\sqrt{14}}$

$V_{\text{cubo}} = l^3 = \left(\frac{16}{\sqrt{14}}\right)^3 = 11,24 \text{ u}^3$

c) ① Recta $\perp$ a π_1 que pase por A.

$\pi_1 \equiv x - 2y + 3z = 6 \Rightarrow \vec{n}_1(1, -2, 3)$ $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow P_{\text{GENÉRICO}}(1+\lambda; 7-2\lambda; 1+3\lambda)$

$A(1, 7, 1)$

② Pto de corte entre π_1 y r :

$x - 2y + 3z = 6 \Rightarrow 1 + \lambda - 2(7 - 2\lambda) + 3(1 + 3\lambda) = 6 \Rightarrow 1 + \lambda - 14 + 4\lambda + 3 + 9\lambda = 6$

$14\lambda = 6 - 1 + 14 - 3 \Rightarrow 14\lambda = 16 \Rightarrow \lambda = \frac{16}{14} \Rightarrow \lambda = \frac{8}{7}$

$P\left(1 + \frac{8}{7}; 7 - 2 \cdot \frac{8}{7}; 1 + 3 \cdot \frac{8}{7}\right) = P\left(\frac{15}{7}, \frac{33}{7}, \frac{31}{7}\right)$

③ FÓRMULA DEL PTO MEDIO

$M = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow \left(\frac{15}{7}, \frac{33}{7}, \frac{31}{7}\right) = \frac{(1, 7, 1) + A'}{2} \Rightarrow (1, 7, 1) + A' = \left(\frac{30}{7}, \frac{66}{7}, \frac{62}{7}\right)$

$\Rightarrow A' = \left(\frac{23}{7}, \frac{17}{7}, \frac{55}{7}\right)$

2021 JULIO A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dado el punto $A(1, 0, -1)$, la recta $r \equiv x - 1 = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x + y - z = 6$, se pide:

a) (0,75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

b) (0,75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π .

c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π .

a) $\vec{n}_\pi(1, 1, -1)$ $\pi_2 \perp r \Rightarrow \vec{r}(1, 1, 2) = \vec{n}_{\pi_2}$

$|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi_2}| = |\vec{n}_\pi| \cdot |\vec{n}_{\pi_2}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow |(1, 1, -1) \cdot (1, 1, 2)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \cos \alpha$

$\Rightarrow |1 + 1 - 2| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

b) π y r son paralelos.

$$d(P_r, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 - 1 - 2 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ u}$$

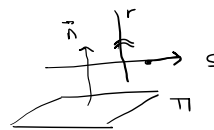
$$P_r(1, -1, 2)$$

$$\pi \equiv x + y - z = 6$$

c) $A(1, 0, -1)$ } El vector de la nueva recta es
 $\perp$ a r . } perpendicular a $\vec{r}$ y a $\vec{n}_\pi$.
 paralelo a π . } $\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 3, 0)$

$$\vec{r}(1, 1, 2)$$

$$\vec{n}_\pi(1, 1, -1)$$



$$s \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{0}$$

2021 JULIO B. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \quad s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$$

a) (1,5 puntos) Escriba la ecuación de la recta perpendicular común a r y a s .

b) (1 punto) Calcule la distancia entre r y s .

a) $\vec{r}(1, 1, -3)$ $s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$ $t = \lambda \Rightarrow x = 2 - \lambda$
 $-2(2 - \lambda) + y - 2\lambda = 1 \Rightarrow -4 + 2\lambda + y - 2\lambda = 1 \Rightarrow y = 5$

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 5 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \vec{s}(-1, 0, 1)$$

① vector perpendicular a $\vec{s}$ y $\vec{r} \Rightarrow \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1, -2, -1)$

② Plano π_1 perpendicular a s y contiene a r :

$$\begin{aligned} \vec{r}(1, 1, -3) & \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad 5(x-2) + 4(y+1) - 1(z+4) = 0 \\ P_r(2, -1, -4) & \quad \pi_1 \equiv 5x + 4y - z - 10 = 0 \\ \vec{w}(-1, -2, -1) & \end{aligned}$$

③ Plano π_2 perpendicular a r y contiene a s :

$$\begin{aligned} \vec{s}(-1, 0, 1) & \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad 2(x-2) - 2(y-5) + 2z = 0 \\ P_s(2, 5, 0) & \quad \pi_2 \equiv 2x - 2y + 2z + 6 = 0 \Rightarrow x - y + z + 3 = 0 \\ \vec{w}(-1, -2, -1) & \end{aligned}$$

$$t \equiv \begin{cases} 5x + 4y - z - 10 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

b) Posición RELATIVA r y s :

$$\vec{r}(1, 1, -3) \quad A^* \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 + F_1 \\ 3F_2 - F_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \quad r(A^*) = 3 \quad \text{SE CRUZAN}$$

$$P_r P_s(0, 6, 4) \quad d(r, s) = \frac{|[P_r P_s, \vec{r}, \vec{s}]|}{|\vec{r} \times \vec{s}|} = \frac{16}{|(-1, -2, -1)|} = \frac{16}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{16}{\sqrt{6}} = \frac{16\sqrt{6}}{6}$$

$$|A^*| = 0 + 18 + 0 - 0 + 4 - 6 = 16$$

$$= \frac{8\sqrt{6}}{3} \text{ u}$$

2021 JUNIO COINCIDENTES A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Desde el punto $P_1(1, 1, -1)$ se ha trazado una recta, r , perpendicular a un plano, π . El punto de intersección del plano con la recta es $P_2(0, 0, 0)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación de la recta r .

b) (1 punto) Hallar una ecuación del plano π .

c) (0,5 puntos) Hallar la distancia de P_1 al plano π .

a) $P_1(1, 1, -1)$ $\overrightarrow{P_2 P_1}(1, 1, -1) = \vec{r}$
 $P_2(0, 0, 0)$

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$

b) $\vec{r}(1, 1, -1) = \vec{n}_\pi$
 $P_2(0, 0, 0)$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

$$1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\pi \equiv x + y - z = 0$$

c) $P_1(1, 1, -1)$ $\pi: x + y - z = 0$ $d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 + 1 - (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \text{ u}$

2021 JUNIO COINCIDENTES B. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

En un laboratorio se lanza un rayo láser desde el punto $P(2, 3, -5)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (-1, -2, 2)$, para que impacte en una placa metálica plana de ecuación $\pi: 3x - 2y - 2z = 1$, con el fin de perforar un orificio.

a) (0,75 puntos) Calcule las coordenadas del punto de impacto.

b) (0,75 puntos) Si el ángulo entre el láser y el plano es menor a 45° , el rayo será reflejado y no se realizará el orificio. Determine si ese es el caso.

c) (1 punto) Para optimizar la velocidad de perforación, se decide lanzar un rayo desde P en dirección perpendicular a π , y lanzar simultáneamente otro rayo, también perpendicular a π , desde un punto situado al otro lado del plano y a la misma distancia de π que de P. ¿Dónde habría que situar el origen del segundo rayo para que ambos impacten en el mismo punto del plano?

a) Obtenemos recta que pase por $P(2, 3, -5)$ y tenga $\vec{v}(-1, -2, 2)$

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -5 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow P_{GENÉRICO}(2 - \lambda, 3 - 2\lambda, -5 + 2\lambda)$$

Sustituimos P_G en plano $\pi \Rightarrow 3(2 - \lambda) - 2(3 - 2\lambda) - 2(-5 + 2\lambda) = 1$
 $\Rightarrow 6 - 3\lambda - 6 + 4\lambda + 10 - 4\lambda = 1 \Rightarrow -3\lambda = -9 \quad \lambda = 3$

$P_G(2 - 3; 3 - 2 \cdot 3; -5 + 2 \cdot 3) \Rightarrow P(-1, -3, 1)$

b) $\vec{r}(-1, -2, 2)$

$\vec{n}_\pi(3, -2, -2)$ $|\vec{r} \cdot \vec{n}_\pi| = |\vec{r}| \cdot |\vec{n}_\pi| \cdot \sin \alpha$
 $\Rightarrow |(-1, -2, 2) \cdot (3, -2, -2)| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-2)^2} \cdot \sin \alpha$
 $| -3 + 4 - 4 | = \sqrt{9} \cdot \sqrt{17} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \frac{1 - 3}{3\sqrt{17}} = \sin \alpha \quad \alpha = 14'03''$

Como $\alpha = 14'03'' < 45^\circ$, no se realizará el orificio

c) $P(2, 3, -5)$ $\vec{n}_\pi(3, -2, -2) = \vec{s}$ $s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -5 - 2\lambda \end{cases}$ $P_{GENÉRICO}(2 + 3\lambda, 3 - 2\lambda, -5 - 2\lambda)$

Pto de corte entre s y π :

$3(2 + 3\lambda) - 2(3 - 2\lambda) - 2(-5 - 2\lambda) = 1 \Rightarrow 6 + 9\lambda - 6 + 4\lambda + 10 + 4\lambda = 1 \Rightarrow 17\lambda = -9 \quad \lambda = \frac{-9}{17}$

$Q = (2 + 3 \cdot \frac{-9}{17}, 3 - 2 \cdot \frac{-9}{17}, -5 - 2 \cdot \frac{-9}{17}) \Rightarrow Q(\frac{7}{17}, \frac{69}{17}, \frac{-67}{17})$

Fórmula del pto medio

$Q = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow (\frac{7}{17}, \frac{69}{17}, \frac{-67}{17}) = \frac{(2, 3, -5) + P'}{2} \Rightarrow (\frac{14}{17}, \frac{138}{17}, \frac{-134}{17}) = (2, 3, -5) + P'$

$P' = (\frac{-20}{17}, \frac{87}{17}, \frac{-49}{17})$

2021 JUNIO A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos).

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y - z + 3 = 0$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π .

b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$.

c) (0,75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π .

a) $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{pasamos a paramétrica } \begin{cases} z = \lambda \\ (-x - y + \lambda = 0) \times 2 \\ 2x + 3y - \lambda + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y + 2\lambda = 0 \\ 2x + 3y - \lambda + 1 = 0 \end{cases}$
 $-x - (-\lambda - 1) + \lambda = 0$
 $-x + \lambda + 1 + \lambda = 0 \Rightarrow x = 2\lambda + 1$
 $y + \lambda + 1 = 0$
 $y = -\lambda - 1$

$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{r}(2, -1, 1)$

② $\vec{r}(2, -1, 1)$ $|\vec{r} \cdot \vec{n}_\pi| = |\vec{r}| \cdot |\vec{n}_\pi| \cdot \sin \alpha \Rightarrow |(2, -1, 1) \cdot (2, 1, -1)| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sin \alpha$
 $\Rightarrow |4 - 1 - 1| = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{6} \Rightarrow \alpha = 19'47''$

b) Pto corte entre r y π :

$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\pi: 2x + y - z + 3 = 0 \Rightarrow$ Sustituimos la recta r en el plano π :
 $2(1 + 2\lambda) + (-1 - \lambda) - \lambda + 3 = 0 \Rightarrow 2 + 4\lambda - 1 - \lambda - \lambda + 3 = 0 \Rightarrow 2\lambda + 4 = 0$
 $\lambda = -2$

$$P(1+2(-2), -1-(-2), -2) \quad P(-3, 1, -2)$$

Recta perpendicular a plano $z-y=0$ que pasa por P:

$$\vec{n}_P(0, -1, 1) \quad t \equiv \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 - \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$$

Pto de corte entre recta t y plano $z-y=0$

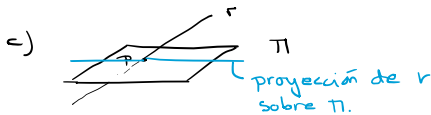
$$z-y=0 \Rightarrow (-2+\lambda) - (1-\lambda) = 0 \Rightarrow -2+\lambda-1+\lambda=0 \Rightarrow 2\lambda=3 \quad \lambda=\frac{3}{2}$$

$$Q(-3, 1-\frac{3}{2}, -2+\frac{3}{2}) \Rightarrow Q(-3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

Fórmula del punto medio: (P' es simétrico de P)

$$Q = \frac{P+P'}{2} \Rightarrow (-3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{(-3, 1, -2) + P'}{2} \Rightarrow (-6, -1, -1) = (-3, 1, -2) + P'$$

$$P'(-3, -2, 1)$$



① Tenemos un plano que contenga a r y sea perpendicular a π .

$$\begin{aligned} P_r(1, -1, 0) \\ \vec{r}(2, -1, 1) \\ \vec{n}_\pi(2, 1, -1) \end{aligned} \quad \beta \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$0(x-1) + 4(y+1) + 4z = 0 \Rightarrow 4y + 4z + 4 = 0$$

$$\beta \equiv y + z + 1 = 0$$

② La recta proyección de r sobre π , es la intersección formada por π y β :

$$s \equiv \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

2021 JUNIO B. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos).

Sean los planos $\pi_1 \equiv x+y=1$ y $\pi_2 \equiv x+z=1$.

a) (1,5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b) (0,5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2 .

c) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x y y .

↪ Si son paralelos a π_1 , tienen el mismo vector normal $\vec{n}_1(1, 1, 0)$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \beta \equiv x + y + D = 0$$

El origen de coordenadas es $O(0, 0, 0)$ sustituimos el pto O en el plano

$$d(O, \beta) = 2 \Rightarrow \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|x+y+D|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|0+0+D|}{\sqrt{2}} = 2$$

$$\Rightarrow |D| = 2\sqrt{2} \quad \begin{cases} D = 2\sqrt{2} \\ D = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

Los planos paralelos a π_1 son:

$$\beta_1 \equiv x + y + 2\sqrt{2} = 0 \quad \text{y} \quad \beta_2 \equiv x + y - 2\sqrt{2} = 0$$

$$b) P(0, 2, 0)$$

$$\vec{n}_{\pi_2}(1, 0, 1) = \vec{r}$$

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}$$

$$c) \pi_1 \equiv x + y = 1$$

• Los puntos del eje x son de la forma $A(x, 0, 0)$. Sustituimos en π_1 : $x+0=1 \Rightarrow x=1$

$$\Rightarrow A(1, 0, 0)$$

• Los puntos del eje y son de la forma $B(0, y, 0)$. Sustituimos en π_1 : $0+y=1 \Rightarrow y=1$

$$\Rightarrow B(0, 1, 0)$$

2021 MODELO A. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos).

Se consideran los puntos $A(3, 1, 2)$, $B(0, 3, 4)$ y $P(-1, 1, 0)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Determinar las coordenadas de un punto Q sabiendo que los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{PQ}$ son linealmente independientes, tienen sentidos opuestos y tienen el mismo módulo.

b) (1 punto) Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta r que contiene a A y P , y de la recta s que contiene a B y al punto $C(2, -1, -2)$.

c) (0,75 puntos) Calcular el coseno del ángulo formado por $\vec{PA}$ y $\vec{PB}$.

a) $\overrightarrow{AB} = (-3, 2, 2)$ $\overrightarrow{PQ} = Q - P = Q - (-1, 1, 0)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Como tienen sentidos opuestos } \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (3, -2, -2) \\ \overrightarrow{PQ} = Q - P \Rightarrow (3, -2, -2) = Q - (-1, 1, 0) \\ Q = (3, -2, -2) + (-1, 1, 0) \Rightarrow Q = (2, -1, -2) \end{array} \right.$

b) Recta r $\left\{ \begin{array}{l} A = (3, 1, 2) \\ P = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AP} = (-4, 0, -2) \end{array} \right.$ $r \equiv \begin{cases} x = -1 - 4\lambda \\ y = 1 \\ z = -2\lambda \end{cases}$

Recta s : $\left\{ \begin{array}{l} B(0, 3, 4) \\ C(2, -1, -2) \\ \overrightarrow{BC} = (2, -4, -6) \\ \overline{BC} = (1, -2, -3) \end{array} \right.$ $s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-4}{-3}$ $\left\{ \begin{array}{l} -2x = y-3 \\ -3x = z-4 \end{array} \right.$ $s \equiv \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 3x + z - 4 = 0 \end{cases}$

Pto de corte entre r y s . Sustituimos r en s :

$$2 \cdot (-1 - 4\lambda) + 1 - 3 = 0 \Rightarrow -2 - 8\lambda + 1 - 3 = 0 \Rightarrow -8\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$P(-1 - 4\lambda; 1; -2\lambda) \Rightarrow P(-1 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}); 1; -2 \cdot (-\frac{1}{2})) \Rightarrow P(1, 1, 1)$$

c) $\overrightarrow{PA} = (4, 0, 2)$ $\overrightarrow{PB} = (1, 2, 4)$ $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow |(4, 0, 2) \cdot (1, 2, 4)| = \sqrt{4^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} \cdot \cos \alpha$
 $\Rightarrow |4 + 0 + 8| = \sqrt{20} \cdot \sqrt{21} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{12}{\sqrt{20} \sqrt{21}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{6\sqrt{105}}{105}$

2021 MODELO B. 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos).

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

a) (0,75 puntos) Hallar la distancia del origen a la recta s .

b) (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de r y s .

c) (1,25 puntos) Escribir la ecuación de una recta perpendicular común a ambas rectas.

a) $O(0, 0, 0)$ $P_s(-3, 2, 1)$ $\vec{s}(2, -1, 1)$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{OP_r} \times \vec{r}|}{|\vec{r}|} \Rightarrow d(O, s) = \frac{|\overrightarrow{OP_r} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{|(3, 5, -1)|}{|(2, -1, 1)|} = \frac{\sqrt{3^2 + 5^2 + (-1)^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}$$

$$\overrightarrow{OP_s}(-3, 2, 1) \quad \overrightarrow{OP_s} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (3, 5, -1) = \frac{\sqrt{210}}{6} u$$

b) $r \equiv \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ Pasamos a paramétrica $\begin{cases} x + 2\lambda = 1 \Rightarrow x = 1 - 2\lambda \\ y + \lambda = 2 \Rightarrow y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $P_r(1, 2, 0)$ $\vec{r}(-2, -1, 1)$

$s \equiv \begin{cases} P_s(-3, 2, 1) \\ \vec{s}(2, -1, 1) \end{cases}$ obtenemos $P_s P_r(4, 0, -1)$

$$A^* \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_1, F_3 - F_1} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} r(A^*) = 3 \quad s \in \text{CruzAN}$$

c) El vector de la nueva recta debe ser perpendicular a los vectores de r y s a la vez:

$$\vec{r}(-2, -1, 1) \quad \vec{s}(2, -1, 1) \quad \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 4, 4)$$

Hacemos plano perpendicular a r que contenga a s :

$$\vec{w}(0, 4, 4) \quad P_s(-3, 2, 1) \quad \vec{s}(2, -1, 1) \quad \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad 8(x-3) + 8(y-2) - 8(z-1) = 0$$

$$8x + 8y - 8z + 16 = 0 \quad \pi_1 \equiv x + y - z + 2 = 0$$

Hacemos plano perpendicular a s que contenga a r :

$$\vec{w}(0, 4, 4) \quad P_r(1, 2, 0) \quad \vec{r}(-2, -1, 1) \quad \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad 8(x-1) - 8(y-2) + 8z = 0$$

$$8x - 8y + 8z + 8 = 0 \quad \pi_2 \equiv x - y + z + 1 = 0$$

$$\pi \equiv \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

2020 SEPTIEMBRE A.3 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dado el punto $P(3, 3, 0)$, la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r .

b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r .

c) (0,75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A .

a) $P(3, 3, 0)$ $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{r_P}(1, 3, 1) \\ \overrightarrow{r_r}(2, 0, -1) \\ \overrightarrow{r}(-1, 1, 0) \end{array} \right\} \left| \begin{array}{ccc} x-3 & y-3 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right| = 0$ $\Rightarrow 1(x-3) + 1(y-3) - 4z = 0$
 $\boxed{x + y - 4z - 6 = 0}$

b) Plano perpendicular a r que pase por P .

$P(3, 3, 0)$ $Ax + By + Cz + D = 0$
 $\vec{n} = \vec{r}(-1, 1, 0)$ $-x + y + 0 + D = 0$
 $-3 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \pi \equiv -x + y = 0$

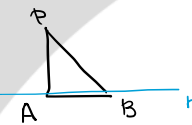
Punto de corte entre π y r . Primero pasamos a ecuación paramétrica:

$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$ y la sustituimos en la ecuación del plano:
 $\pi \equiv -x + y = 0 \Rightarrow -(2 - \lambda) + \lambda = 0 \Rightarrow -2 + \lambda + \lambda = 0$
 $\Rightarrow 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1$

$Q(2 - \lambda, \lambda, -1) \Rightarrow Q(1, 1, -1)$

Fórmula del punto medio:

$Q = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow (1, 1, -1) = \frac{(3, 3, 0) + P'}{2} \Rightarrow (2, 2, -2) = (3, 3, 0) + P' \Rightarrow \boxed{P' = (-1, -1, -2)}$

c)  $A = \frac{3}{\sqrt{2}}$ $r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{cases}$ ① P genérico $(2 - \lambda, \lambda, -1)$
 $A(2 - \lambda_1, \lambda_1, -1)$ $B(2 - \lambda_2, \lambda_2, -1)$

② $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AP} = P - A = (3, 3, 0) - (2 - \lambda_1, \lambda_1, -1) = (1 + \lambda_1, 3 - \lambda_1, 1) \\ \overrightarrow{AB} = B - A = (2 - \lambda_2, \lambda_2, -1) - (2 - \lambda_1, \lambda_1, -1) = (-\lambda_2 + \lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1, 0) \end{cases}$
 $(1 + \lambda_1, 3 - \lambda_1, 1) \cdot (-\lambda_2 + \lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1, 0) = 0$
 $-1 - \lambda_1 + 3 - \lambda_1 = 0 \Rightarrow -2\lambda_1 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}$

$\overrightarrow{AB} = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot (-1, 1, 0)$
 $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$

$\Downarrow A(2 - \lambda_1, \lambda_1, -1) \Rightarrow \boxed{A(1, 1, -1)}$

③ $A = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}|}{2}$ Como $\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AP} = (1 + \lambda_1, 3 - \lambda_1, 1) = (2, 2, 1) \\ \overrightarrow{AB} = (-\lambda_2 + \lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1, 0) = (1 - \lambda_2, \lambda_2 - 1, 0) \end{cases}$

$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 - \lambda_2 & \lambda_2 - 1 & 0 \end{vmatrix} = (-\lambda_2 + 1, -\lambda_2 + 1, 2\lambda_2 - 2 - 2\lambda_2) = (1 - \lambda_2, 1 - \lambda_2, -4\lambda_2)$

$|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1 - \lambda_2)^2 + (1 - \lambda_2)^2 + (-4\lambda_2)^2} = \sqrt{2(1 - 2\lambda_2 + \lambda_2^2) + 16\lambda_2^2} = \sqrt{18\lambda_2^2 - 36\lambda_2 + 18}$
 $= \sqrt{2 - 4\lambda_2 + 2\lambda_2^2 + 16\lambda_2^2 - 32\lambda_2 + 16} = \sqrt{18\lambda_2^2 - 36\lambda_2 + 18}$

$A = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}|}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{18\lambda_2^2 - 36\lambda_2 + 18}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow 18\lambda_2^2 - 36\lambda_2 + 18 = \frac{36}{2}$

$18\lambda_2^2 - 36\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2(18\lambda_2 - 36) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$
 $18\lambda_2 - 36 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 2$



- 1ª opción $B(2-\lambda_2, \lambda_2, -1) = (2, 0, -1)$
- 2ª opción $B(0, 2, -1)$

2020 SEPTIEMBRE B.3 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Del paralelogramo ABCD, se conocen los vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(4, 3, -2)$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

c) (0,5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

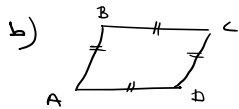
a) Fórmula del punto medio: $Q = \frac{A+C}{2} \Rightarrow Q = \frac{(1, 0, -1) + (4, 3, -2)}{2} \Rightarrow Q = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$$\overrightarrow{AC} = (3, 3, -1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (2, 2, -2)$$

$$\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4, 4, 0)$$

$$\vec{r} \equiv \begin{cases} x = \frac{5}{2} - 4\lambda \\ y = \frac{3}{2} + 4\lambda \\ z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\vec{D} - A = (2, 2, -2) \Rightarrow D = (2, 2, -2) + A \Rightarrow D = (2, 2, -2) + (1, 0, -1)$$

$$\Rightarrow D = (3, 2, -3)$$

$$A = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \right| = |(-4, 4, 0)| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ u}^2$$

c) $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$
 $\overrightarrow{AC} = (3, 3, -1)$

$$|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \alpha$$

$$|(1, 1, 1) \cdot (3, 3, -1)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2 + (-1)^2} \cdot \cos \alpha$$

$$|3 + 3 - 1| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{19} \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{19}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5\sqrt{57}}{57}$$

2020 JULIO COINCIDENTE A.3 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Se consideran los puntos $A(0, -4, 2)$, $B(3, -2, 3)$ y $C(-1, -3, 3)$. Se pide:

a) (0,75 puntos) Comprobar que el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo, identificando los catetos y la hipotenusa.

b) (0,75 puntos) Determinar una ecuación del plano π que contiene a los tres puntos.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por los puntos B y C.

a) $\overrightarrow{AB} = (3, 2, 1)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 1)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{BC} = (-4, -1, 0)$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

Si es un triángulo rectángulo, cumple PITA-GORAS:

$$h^2 = c^2 + l^2$$

$$\sqrt{17}^2 = \sqrt{14}^2 + \sqrt{3}^2 \Rightarrow 17 = 14 + 3 \checkmark \text{ CUMPLE}$$

ES UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ SON CATETOS y $\overrightarrow{BC}$ LA HIPOTENUSA

b) $A(0, -4, 2)$

$$\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{BC} = (-4, -1, 0)$$

$$\begin{vmatrix} x & y+4 & z-2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x - 4(y+4) + 5(z-2) = 0$$

$$\pi \equiv x - 4y + 5z - 26 = 0$$

c) $B(3, -2, 3)$

$$\overrightarrow{BC} = (-4, -1, 0)$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 - 4\lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

Plano perpendicular a r que pasa por $A(0, -4, 2)$
 $\vec{r} = \vec{n}_\pi(-4, -1, 0)$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$-4x - y + D = 0 \Rightarrow -4 \cdot 0 - (-4) + D = 0 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow -4x - y - 4 = 0 \Rightarrow \pi = 4x + y + 4 = 0$$

Punto de corte entre r y π : Sustituimos r en π :

$$4 \cdot (3 - 4\lambda) + (-2 - \lambda) + 4 = 0 \Rightarrow 12 - 16\lambda - 2 - \lambda + 4 = 0 \Rightarrow -17\lambda = -14 \Rightarrow \lambda = \frac{14}{17}$$

$$P(3 - 4\lambda, -2 - \lambda, 3) \Rightarrow P(3 - 4 \cdot \frac{14}{17}, -2 - \frac{14}{17}, 3) \Rightarrow P(\frac{-5}{17}, \frac{-48}{17}, 3)$$

Fórmula del punto medio: $P = \frac{A+A'}{2}$

$$\left(\frac{-5}{17}, \frac{-48}{17}, 3\right) = \frac{(0, -4, 2) + A'}{2} \Rightarrow \left(\frac{-10}{17}, \frac{-96}{17}, 6\right) = (0, -4, 2) + A' \Rightarrow A' \left(\frac{-10}{17}, \frac{-96}{17}, 4\right)$$



2020 JULIO COINCIDENTE B.3 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=4 \end{cases}$ y la recta s que pasa por $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ y tiene dirección $(-1, 1, 0)$ se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar la posición relativa de ambas rectas.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de un plano que contiene a la recta r y a un vector perpendicular a r y a s .

c) (1 punto) Encontrar una perpendicular común a r y a s .

$$a) \quad r \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=4 \end{cases} \quad z=\lambda \Rightarrow x=\lambda \quad \lambda+2y-\lambda=4 \Rightarrow y=2 \quad r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2 \\ z=\lambda \end{cases} \quad \vec{r} \begin{pmatrix} 0, 2, 0 \\ 1, 0, 1 \end{pmatrix} \quad s \begin{pmatrix} \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \\ -1, 1, 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB}(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}) \quad A^* \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times 4 \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2+F_1 \\ F_3-F_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 7F_3-F_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad r(A^*)=3 \quad \boxed{\text{SE CRUZAN}}$$

$$b) \quad \vec{r} \begin{pmatrix} 0, 2, 0 \\ 1, 0, 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} \begin{vmatrix} \vec{r} & \vec{s} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1)$$

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2(y-2) - z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - 2y - z + 4 = 0}$$

c) Plano perpendicular a r y que contiene a s :

$$\vec{w}(-1, -1, 1) \quad A(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \quad \vec{s}(-1, 1, 0) \quad \pi \equiv \begin{vmatrix} x-\frac{1}{4} & y-\frac{1}{4} & z-\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} -1 \cdot (x-\frac{1}{4}) - 1 \cdot (y-\frac{1}{4}) - 2 \cdot (z-\frac{1}{2}) = 0 \\ -x-y-2z+\frac{3}{2}=0 \\ -2x-2y-4z+3=0 \\ \pi \equiv 2x+2y+4z-3=0 \end{matrix}$$

Plano perpendicular a s y contiene a r :

$$\vec{w}(-1, -1, 1) \quad B(0, 2, 0) \quad \vec{r} \begin{pmatrix} 0, 2, 0 \\ 1, 0, 1 \end{pmatrix} \quad \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} -x+2(y-2)+z=0 \\ -x+2y+z-4=0 \\ \pi_2 \equiv x-2y-z+4=0 \end{matrix}$$

$$\pi \equiv \begin{cases} 2x+2y+4z-3=0 \\ x-2y-z+4=0 \end{cases}$$

2020 JULIO A.3 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x-y=2 \\ 3x-z=-1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s .

b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$.

c) (1,25 puntos) Encontrar la ecuación de un plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s .

$$a) \quad s \begin{pmatrix} A(-1, -4, 0) \\ \vec{s}(2, -1, 1) \end{pmatrix} \quad r \equiv \begin{cases} x-y=2 \\ 3x-z=-1 \end{cases} \quad y=\lambda \Rightarrow x=2+\lambda \quad 3(2+\lambda)-z=-1 \Rightarrow 6+3\lambda+1=z \Rightarrow z=7+3\lambda \\ r \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=7+3\lambda \end{cases} \quad \vec{r} \begin{pmatrix} 2, 0, 7 \\ 1, 1, 3 \end{pmatrix} \quad A^* \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2F_1-F_2 \\ 3F_1-F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3F_3+F_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \\ r(A^*)=3 \Rightarrow \boxed{\text{SE CRUZAN}}$$

$$b) \quad P(2, -1, 5) \quad \vec{n} = \vec{r} = (1, 1, 3)$$

$$Ax+By+Cz+D=0 \Rightarrow x+y+3z+D=0 \Rightarrow 2-1+3 \cdot 5+D=0 \Rightarrow D=-16 \\ \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x+y+3z-16=0}$$

$$c) \quad \vec{r} \begin{pmatrix} 1, 1, 3 \\ 2, -1, 1 \end{pmatrix} \quad \vec{s} \begin{pmatrix} 2, -1, 1 \\ -1, -4, 0 \end{pmatrix} \quad \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+4 & z \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} 4 \cdot (x+1) + 5 \cdot (y+4) - 3z = 0 \\ 4x+5y-3z+24=0 \end{matrix}$$

2020 JULIO B.3 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dados los puntos $P(-3, 1, 2)$ y $Q(-1, 0, 1)$ y el plano $\pi \equiv x+2y-3z=4$. Se pide:

- a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π .
b) (0,5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.
c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

a)  $A = \text{proyección de } Q \text{ sobre } \pi$ ① Recta perpendicular a π que contiene a Q.
 $\vec{n}_\pi = \vec{r} = (1, 2, -3)$ $Q(-1, 0, 1)$

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$$

 ② Punto de corte entre π y $r \equiv A$
 $\pi \equiv x + 2y - 3z = 4 \Rightarrow (-1 + \lambda) + 2(2\lambda) - 3(1 - 3\lambda) = 4 \Rightarrow -1 + \lambda + 4\lambda - 3 + 9\lambda = 4 \Rightarrow 14\lambda = 8$
 $\Rightarrow \lambda = \frac{8}{14} \Rightarrow \lambda = \frac{4}{7}$
 $A(-1 + \lambda, 2\lambda, 1 - 3\lambda) \Rightarrow A\left(-1 + \frac{4}{7}, 2 \cdot \frac{4}{7}, 1 - 3 \cdot \frac{4}{7}\right) \Rightarrow A\left(-\frac{3}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{5}{7}\right)$

2020 MODELO A.3 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ $r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$, se pide:

- a) (1,5 puntos) Estudiar la posición relativa y hallar la distancia entre ellas.
b) (1 punto) Hallar el punto de corte entre la recta r_2 y el plano que contiene a r_1 y que pasa por el origen de coordenadas.

a) Pasamos a paramétrica las ecuaciones de r_1 y r_2 .

$$r_1 \rightarrow z = \lambda \quad \begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases} \quad r_1 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad ; \quad r_2 \rightarrow z = \lambda \quad \begin{cases} x = 4 + 5\lambda \\ y = 4\lambda - 3 \end{cases} \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 4 + 5\lambda \\ y = -3 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

 $\vec{r}_1(1, -3, 1) \quad A(-1, 2, 0) \quad \vec{r}_2(5, 4, 1) \quad B(4, -3, 0)$
 $\vec{AB}(5, -5, 0)$

$$A^* \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{AB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad |A^*| = 0 - 25 - 15 - 20 - 0 + 5 = -55 \quad r(A^*) = 3 \quad \text{SE CRUZAN}$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{AB}]|}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|} = \frac{|-55|}{|(-7, 4, 19)|} = \frac{55}{\sqrt{(-7)^2 + 4^2 + 19^2}} = \frac{55}{\sqrt{426}} = \frac{55\sqrt{426}}{426} \text{ u}$$

$$|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-7, 4, 19)$$

b) Plano que contiene a r_1 y pasa por $O(0, 0, 0)$.

$$\pi_1 \rightarrow \begin{cases} A(-1, 2, 0) \\ \vec{r}_1(1, -3, 1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \quad \vec{OA}(-1, 2, 0) \quad \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad 2x + y + z = 0$$

2020 MODELO B.3 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dados los puntos $A(1, 1, -2)$ y $B(3, -1, 4)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 3 \end{cases}$, se pide:

- a) (1,5 puntos) Calcular el área del triángulo OPQ, siendo $O(0, 0, 0)$, P el punto medio del segmento AB y Q la intersección de la recta que pasa por A y B y el plano $\pi \equiv z = 7$.
b) (0,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a la recta r.
c) (0,5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman la recta r y la recta que pasa por A y B.

a) Punto medio $P = \frac{A+B}{2} = \frac{(1, 1, -2) + (3, -1, 4)}{2} = \frac{(4, 0, 2)}{2} = (2, 0, 1)$

• Punto Q:

Recta que pasa por A y B $\vec{AB}(2, -2, 6)$ $S \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -2 + 6\lambda \end{cases}$ y sustituimos en π :

$$\Rightarrow \pi \equiv z = 7 \Rightarrow -2 + 6\lambda = 7 \Rightarrow 6\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = \frac{9}{6} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

$$Q\left(1 + 2 \cdot \frac{3}{2}, 1 - 2 \cdot \frac{3}{2}, -2 + 6 \cdot \frac{3}{2}\right) \Rightarrow Q(4, -2, 7)$$



• Área OPQ: $A = \frac{|\vec{OP} \times \vec{OQ}|}{2} = \frac{2\sqrt{30}}{2} = \boxed{\sqrt{30} \text{ u}^2}$

$\vec{OP} (2, 0, 1)$

$\vec{OQ} (4, -2, 7)$

$\vec{OP} \times \vec{OQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 7 \end{vmatrix} = (2, -10, -4) \Rightarrow |\vec{OP} \times \vec{OQ}| = \sqrt{2^2 + (-10)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{30}$

b) $A(1, 1, -2) \quad \vec{n}_\pi = \vec{r}(3, 5, 0)$

$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow 3x + 5y + D = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = -8$

$\boxed{\pi: 3x + 5y - 8 = 0}$

c) $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 + 5\lambda \\ z = 3 \end{cases}$

$\vec{r}(3, 5, 0)$

$s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -2 + 6\lambda \end{cases}$

$\vec{s}(2, -2, 6)$

$|\vec{r} \cdot \vec{s}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha$

$|(\vec{r} \cdot \vec{s})| = |\vec{r}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow |3 \cdot 5 + 0 \cdot (-2)| = \sqrt{3^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 6^2} \cdot \cos \alpha$

$|15| = \sqrt{34} \cdot \sqrt{44} \cdot \cos \alpha$

$\cos \alpha = \frac{15}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{44}} \Rightarrow \boxed{\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{187}}}$