2023 MODELO A.3 (2 puntos)

a) Represente la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ prestando especial atención a la determinación de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. Determine los valores de x en los que f alcanza máximos o mínimos relativos.
b) Represente la gráfica de $g(x) = f(x-3) + 2$, donde f es la función del apartado anterior.

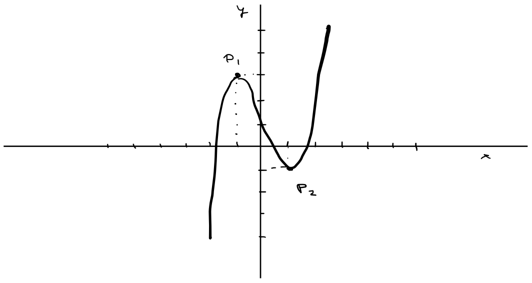
a) • Dom $f(x) = \mathbb{R}$ (porque es polinómica)

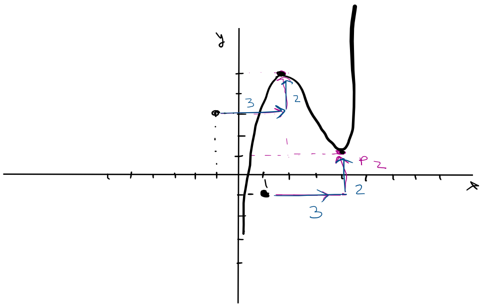
• $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1}$ ↗ $x = 1$, ↘ $x = -1$ Posibles máx y mín.

$-\infty$	-1		1	∞
↗ $f'(-2) > 0$	↓ MAX	↘ $f'(0) < 0$	↓ MÍN	↗ $f'(2) > 0$

Se alcanza el máximo en $x = -1$
Se alcanza el mínimo en $x = 1$.

• $f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$ $P_1(-1, 3)$ • $f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$ $P_2(1, -1)$





b) $g(x) = f(x-3) + 2$

• Se puede volver a calcular el dominio, máximos y mínimos, o podemos hacer una translación de la función $f(x)$.

$g(x) = f(x-3) + 2$ → sube 2 hacia arriba
→ se mueve 3 a la derecha

2023 MODELO B.2 (2 puntos)

a) Determine el área de la región acotada del plano limitada inferiormente por el eje de las x y superiormente por la parábola $y = 9x - x^2$.
b) Determine el área de la región acotada del plano limitada inferiormente por la parábola $y = 9x - x^2$ y superiormente por las rectas tangentes a esa parábola en los puntos de corte con el eje de las x.

a) eje x es $y = 0$.
$y = 9x - x^2$

① Puntos de corte
$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 9x - x^2 \end{array}\right\}$ $9x - x^2 = 0 \Rightarrow x(9 - x) = 0$ ↗ $x = 0$, ↘ $x = 9$

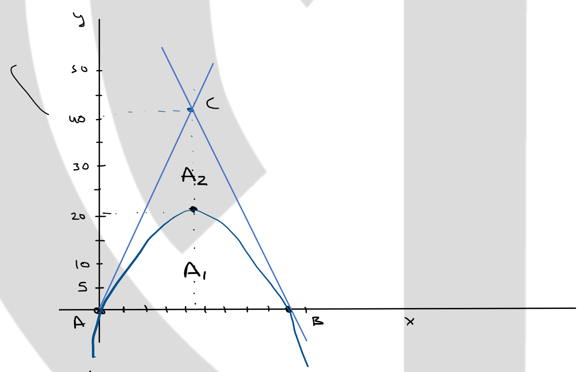
$A = \int_a^b (\text{función}_1 - \text{función}_2)\,dx$
función 1 $\Rightarrow y = 9x - x^2$
función 2 $\Rightarrow y = 0$

② $A = \int_0^9 ((9x - x^2) - 0)\,dx = \int_0^9 (9x - x^2)\,dx = \left[\frac{9x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^9 = \left(\frac{9\cdot 9^2}{2} - \frac{9^3}{3}\right) - \left(\frac{9\cdot 0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right) = \boxed{121{,}5\ u^2}$

b) ① Rectas tangentes en $x = 0$ y $x = 9$.

• En $x = 0$, $y = 0$ $P(0,0)$
• $m = f'(x) = 9 - 2x$ $m = f'(0) = 9$
• $y = m(x-a) + b \Rightarrow y = 9\cdot(x - 0) + 0 \Rightarrow y = 9x$

• En $x = 9$, $y = 0$ $P_T(9, 0)$
$m = f'(9) = 9 - 2\cdot 9 = -9$
• $y = m(x-a) + b \Rightarrow y = -9(x - 9) + 0 \Rightarrow y = -9x + 81$



② Representamos:

• $y = 9x - x^2$

x	y
0	0
9	0
4,5	20,25

VÉRTICE $x = \frac{-b}{2a} = 4{,}5$

$y = 9\cdot 4{,}5 - 4{,}5^2 = 20{,}25$

• Punto de corte entre rectas:
$\left.\begin{array}{l} y = 9x \\ y = -9x + 81 \end{array}\right\}$ $9x = -9x + 81 \Rightarrow 18x = 81 \Rightarrow x = \frac{81}{18} = 4{,}5$
$y = 9\cdot 4{,}5 = 40{,}5$
$P(4{,}5;\ 40{,}5)$

• Si nos damos cuenta, podemos hacer el ejercicio más rápido porque tenemos el A_1 calculada en el apartado a). Calculamos el área del triángulo por los vértices A, B y C. $A_T = \frac{b\cdot a}{2} = \frac{9\cdot 40{,}5}{2} = 182{,}25$
$\Rightarrow A_2 = A_{\text{TRIÁNGULO}} - A_1 = 182{,}25 - 121{,}5 = \boxed{60{,}75\ u^2}$

2022 JUNIO COINCIDENTES A.3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} 2x - a & si\ x < -2 \\ x^2 & si -2 \le x \le 1 \\ x + b & si\ 1 < x \end{cases}$$

a) Determine los valores de a y b que hacen que f sea continua en $\mathbb{R}$.
b) Para $a = b = -8$, calcule

$$\int_{-3}^{0} f(x)dx.$$

a) En $x = -2$

$f(-2) = (-2)^2 = 4$

$\lim_{x \to -2^+} x^2 = (-2)^2 = 4$

$\lim_{x \to -2^-} 2x - a = 2\cdot(-2) - a = -4 - a$

Para que la función sea continua en $x = -2 \Rightarrow$

$f(-2) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^-} f(x)$

$4 = -4 - a \Rightarrow -a = 8 \Rightarrow \boxed{a = -8}$

En $x = 1$

$f(1) = 1^2 = 1$

$\lim_{x \to 1^+} x + b = 1 + b$

$\lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1 \Rightarrow f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$

$1 = 1 + b \Rightarrow \boxed{b = 0}$

b) $f(x) \begin{cases} 2x + 8 & si\ x \le -2 \\ x^2 & si\ -2 < x \le 1 \\ x - 8 & si\ 1 < x \end{cases}$

$\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = \int_{-3}^{-2} (2x+8)\,dx + \int_{-2}^{0} x^2\,dx = \left[\frac{2x^2}{2} + 8x\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0}$

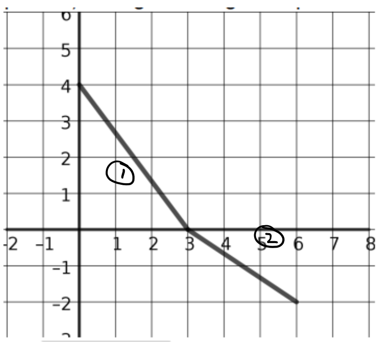
$= \left[\left((-2)^2 + 8(-2)\right) - \left((-3)^2 + 8(-3)\right)\right] + \left[\frac{0^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right]$

$= \left[(4 - 16) - (9 - 24)\right] + \frac{8}{3} = -12 + 15 + \frac{8}{3} = 3 + \frac{8}{3} = \boxed{\frac{17}{3}}$

2022 JUNIO COINCIDENTES B.2 (2 puntos)

La siguiente figura representa la gráfica de una función lineal a trozos $f: [0,6] \to \mathbb{R}$

a) Determine razonadamente el valor de la integral definida $\int_0^3 f(x)dx$.
b) ¿Cuál número es mayor, $\int_0^3 f(x)dx$ o $\int_0^6 f(x)dx$. Razone su respuesta.



a) $\int_0^3 f(x)\,dx = \text{ÁREA}_{①} \Rightarrow \int_0^3 f(x)\,dx = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = \boxed{6}$

b) $\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^6 f(x)\,dx = 6 + \frac{b \cdot a}{2} = 6 + \frac{3\cdot(-2)}{2}$

$= 3$

$\boxed{\text{Por tanto es mayor } \int_0^3 f(x)\,dx}$

2022 JUNIO COINCIDENTES B.3 (2 puntos)

Considere la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-K)^2}$$

a) Obtenga el valor de la constante K para que la recta tangente a la función en $x = 9$ sea paralela al eje de las x. Indique la expresión de dicha recta.
b) Para $K = 3$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ y clasifique los extremos relativos de esta función.

a) • Si la recta tangente es paralela al eje x, es una recta horizontal, y por tanto $m = 0$.

① $m = f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2\cdot(x-k)^2 - x^3\cdot 2(x-k)\cdot 1}{(x-k)^4} = \frac{3x^2(x-k) - x^3\cdot 2}{(x-k)^3}$

$\Rightarrow m = f'(9) = 0 \Rightarrow \frac{3\cdot 9^2(9-k) - 9^3\cdot 2}{(9-k)^3} = 0 \Rightarrow 2187 - 243k - 1458 = 0\cdot(9-k)^3$

$\Rightarrow 729 - 243k = 0 \Rightarrow \boxed{K = 3}$

• ECUACIÓN RECTA TANGENTE $\Rightarrow y = m(x-a) + b$

$m = 0 \quad P_T(a,b) = (9, \frac{81}{4}) \Rightarrow b = f(9) = \frac{9^3}{(9-3)^2} = \frac{81}{4}$

$$y = 0(x-9) + \frac{81}{4} \Rightarrow \boxed{y = \frac{81}{4}}$$

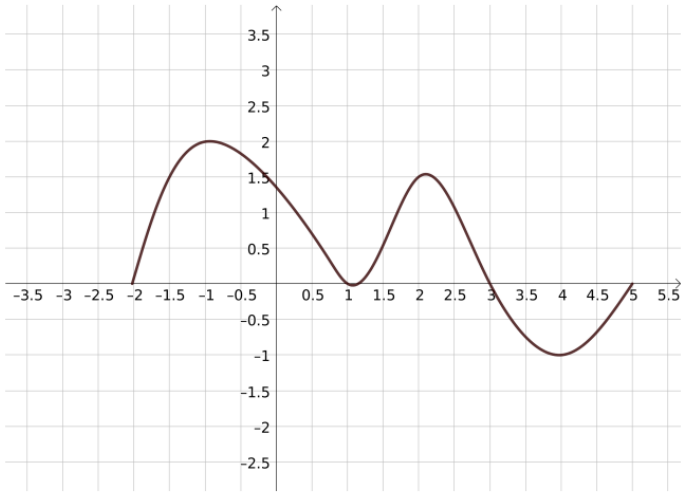
2022 JUNIO A.3 (2 puntos)

La figura dada representa la gráfica de cierta función f. La gráfica representada tiene tangentes horizontales en x=-1, x = 1, x = 2 y x = 4.

a) Determine razonadamente los intervalos en los que $f'(x) > 0$.

b) Determine razonadamente cuál es el signo de

$$\int_{-2}^{5} f(x)dx.$$



a) En los intervalos en los que $f'(x) > 0$ la función $f(x)$ es creciente, por tanto en $\boxed{(-2,-1) \cup (1,2) \cup (4,5)}$

b) $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = \int_{-2}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx$

Como $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$ está por encima del eje x, su valor es positivo.

Como $\int_{3}^{5} f(x)\,dx$ está por debajo del eje x, su valor es negativo.

Pero al ser mayor el área de $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$ que la de $\int_{3}^{5} f(x)\,dx$, entonces el signo de $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx > 0$ (POSITIVO).

2022 JUNIO B.2 (2 puntos)

Considere la función real de variable real

$f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

a) Determine sus asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

b) Calcule $f'(x)$ y halle el valor de $f'(2)$.

a) $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

A.V en $x = 1$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x+1}{x-1} = \frac{1}{0}$ IND $\boxed{\text{Hay A.V en } x=1}$

$\begin{cases} \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x+1}{x-1} = \frac{+}{+} = \infty \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x+1}{x-1} = \frac{+}{-} = -\infty \end{cases}$

A.H LIMITES AL INFINITO

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to \infty} \frac{x^2-x+1}{x-1} = \infty \\ \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-x+1}{x-1} = -\infty \end{array}\right\}$ $\boxed{\text{NO HAY A.H}}$

A.O $y = mx + n$

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2-x} = 1$

$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-x+1}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-x+1-x(x-1)}{x-1}\right)$

$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x-1}\right) = 0 \Rightarrow y = 1\cdot x + n \Rightarrow \boxed{y = x \quad \text{A.O}}$

b) $f'(x) = \dfrac{(2x-1)\cdot(x-1) - (x^2-x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2} = \boxed{\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}}$

$f'(2) = \dfrac{2^2 - 2\cdot 2}{(2-1)^2} = \boxed{0}$

2022 MODELO A.3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcule

$$\int_{0}^{1} 2xf(x)dx$$

a) $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ ① $P_T(a,b)=(0,\ ) \Rightarrow b=f(0)=\sqrt{1+0^2}=1 \Rightarrow P_T(0,1)$

② $m=f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$ $\quad m=f'(0)=\dfrac{2\cdot 0}{2\sqrt{1+0^2}}=0$

③ ECUACIÓN RECTA TANGENTE $\Rightarrow y=m(x-a)+b \Rightarrow y=0(x-1)+0 \Rightarrow \boxed{y=0}$

b) $\displaystyle\int_0^1 2x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_0^1 2x(1+x^2)^{1/2}dx=\left[\frac{(1+x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\left[\frac{2(1+x^2)^{3/2}}{3}\right]_0^1$

$=\left(\dfrac{2(1+1^2)^{3/2}}{3}\right)-\left(\dfrac{2(1+0^2)^{3/2}}{3}\right)=\dfrac{2\cdot\sqrt{2^3}}{3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}-\dfrac{2}{3}=\boxed{\dfrac{4\sqrt{2}-2}{3}}$

2022 MODELO B.2 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{10}{x^2+2x-3}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.
b) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine los extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

a) $x^2+2x-3=0 \quad x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\dfrac{-2\pm4}{2}$ $\begin{cases}x=1\\x=-3\end{cases}$ $\boxed{\text{Dom}f(x)=\mathbb{R}-\{-3,1\}}$

A.V

• En $x=-3$

$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{10}{x^2+2x-3}=\dfrac{10}{0}$ IND $\boxed{\text{Hay A.V en } x=-3}$

$\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{10}{x^2+2x-3}=\dfrac{+}{-}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{10}{x^2+2x-3}=\dfrac{+}{+}=+\infty$

• En $x=1$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{10}{x^2+2x-3}=\dfrac{10}{0}$ IND $\boxed{\text{Hay A.V en } x=1}$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{10}{x^2+2x-3}=\dfrac{+}{+}=\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{10}{x^2+2x-3}=\dfrac{+}{-}=-\infty$

A.H

$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{10}{x^2+2x-3}&=0\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{10}{x^2+2x-3}&=0\end{aligned}\right\}$ $\boxed{\text{Hay A.H en } y=0}$

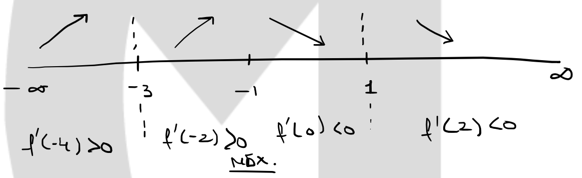
$\boxed{\text{A.O No hay porque hay A.H.}}$

b)
① $\text{Dom}f(x)=\mathbb{R}-\{-3,1\}$

② $f'(x)=0 \Rightarrow f'(x)=\dfrac{0(x^2+2x-3)-10\cdot(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}=\dfrac{-20x-20}{(x^2+2x-3)^2} \Rightarrow \dfrac{-20x-20}{(x^2+2x-3)^2}=0 \Rightarrow -20x-20=0$

$-20x=20$

$x=-1$

③ 

$\boxed{\begin{cases}\text{Crece } (-\infty,-3)\cup(-3,-1)\\ \text{Decrece } (-1,1)\cup(1,\infty)\end{cases}}$

④ $f(-1)=\dfrac{10}{(-1)^2+2\cdot(-1)-3}=\dfrac{10}{-4}=-\dfrac{5}{2} \Rightarrow$ $\boxed{\text{Hay un MÁXIMO en } P\left(-1,-\frac{5}{2}\right)}$

2022 MODELO B.3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\begin{cases}ax^2-2x & si\ x\le 2\\ \ln(x-1) & si\ x>2\end{cases}$$

a) Determine para qué valores de $a\in\mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en su dominio.
b) Para $a=1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=-1, x=0$.

a) En $x=2$

$f(2) = a\cdot 2^2 - 2\cdot 2 = 4a-4$

$\lim_{x\to 2^+} \ln(x-1) = \ln(2-1) = \ln 1 = 0$

$\lim_{x\to 2^-} ax^2-2x = 4a-4$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=2 \Rightarrow f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$

$\Rightarrow 4a-4=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$

b) $a=1$

- $f(x) = \begin{cases} x^2-2x & \text{si } x\le 2 \\ \ln(x-1) & \text{si } x>2 \end{cases}$
- $y=0$
- $x=-1$
- $x=0$

① PTOS DE CORTE ENTRE $\begin{cases} y=0 \\ f(x)=x^2-2x \end{cases} \Rightarrow x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$ $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$ NO AFECTAN.

② $A = \int_{-1}^{0} (x^2-2x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0}$

$= \left(\frac{0^3}{3} - 0^2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2\right) = \frac{1}{3} + 1 = \boxed{\frac{4}{3}\,u^2}$

2021 JULIO COINCIDENTE A.2 (2 puntos)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = 3x^3 - ax + 1$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que el punto de abscisa $x = 1$ de la función $f(x)$ sea un punto de tangente horizontal. Determine si es un máximo, mínimo o punto de inflexión.
b) Determine el valor del parámetro real a para que se cumpla que la $\int_0^1 f(x)dx = 1$

a) • Si en $x=1$ hay una recta horizontal, entonces $f'(1)=0$

$f'(x) = 9x^2 - a \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 9\cdot 1^2 - a = 0 \Rightarrow 9-a=0 \Rightarrow \boxed{a=9}$

• $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R}$

Como $f'(1)=0$, será un máximo o mínimo.

$f'(x) = 9x^2-9$

$-\infty$ ↘ $f'(0)<0$ | 1 MÍNIMO | ↗ $f'(2)>0$ ∞

$\boxed{\text{Hay un MÍNIMO EN } x=1.}$

b) $\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 (3x^3 - ax + 1)\,dx = 1 \Rightarrow \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{ax^2}{2} + x\right]_0^1 = 1$

$\left(\frac{3\cdot 1^4}{4} - \frac{a\cdot 1^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{3\cdot 0^4}{4} - \frac{a\cdot 0^2}{2} + 0\right) = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} - \frac{a}{2} + 1 = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = \frac{6}{4}$

$\boxed{a = \frac{3}{2}}$

2021 JULIO COINCIDENTE B.2 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$f(x) = \dfrac{9-x^2}{4-x^2}$

a) Halle el dominio de la función y sus asíntotas.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

a) $4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4}$ $\begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$ $\boxed{\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}}$

A.V • En $x=2$

$\lim_{x\to 2} \frac{9-x^2}{4-x^2} = \frac{5}{0}$ IND. $\boxed{\text{Hay A.V en } x=2}$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{9-x^2}{4-x^2} = \frac{+}{-} = -\infty$

$\lim_{x\to 2^-} \frac{9-x^2}{4-x^2} = \frac{+}{+} = +\infty.$

• En $x=-2$

$\lim_{x\to -2} \frac{9-x^2}{4-x^2} = \frac{5}{0}$ IND $\boxed{\text{Hay A.V en } x=-2.}$

$\lim_{x\to -2^+} \frac{9-x^2}{4-x^2} = \frac{+}{+} = \infty$

$\lim_{x\to -2^-} \frac{9-x^2}{4-x^2} = \frac{+}{-} = -\infty.$

A.H LÍMITES AL INFINITO

$\lim_{x\to \infty} \frac{9-x^2}{4-x^2} = 1$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{9-x^2}{4-x^2} = 1$

$\boxed{\text{Hay A.H en } y=1}$

A.O $\boxed{\text{No hay porque hay A.H}}$

b) ① $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

② $f'(x)=0 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-2x\cdot(4-x^2)-(9-x^2)\cdot(-2x)}{(4-x^2)^2} = \dfrac{-8x+2x^3-(-18x+2x^3)}{(4-x^2)^2} = \dfrac{10x}{(4-x^2)^2}$

$\Rightarrow \dfrac{10x}{(4-x^2)^2} = 0 \Rightarrow 10x = 0 \Rightarrow x = 0$ Posible máx o mín.

③ $-\infty \quad \searrow \quad -2 \quad \searrow \quad 0 \quad \nearrow \quad 2 \quad \nearrow \quad \infty$

$f'(-3)<0 \quad f'(-1)<0 \quad f'(1) \quad f'(3)$

$$\begin{cases} \text{Crece } (0,2)\cup(2,\infty) \\ \text{Decrece } (-\infty,-2)\cup(-2,0) \end{cases}$$

2021 JULIO COINCIDENTE B.3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$f(x)=\sqrt{x^2-9}$

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x)$ en el punto de abscisa $x=5$.
b) Calcule $\int_3^5 9x\sqrt{x^2-9}\,dx$

a) ① $P_T(a,b)=(5,b) \Rightarrow b=f(5)=\sqrt{5^2-9}=\sqrt{16}=4 \Rightarrow P_T(5,4)$

② $m=f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} \Rightarrow m=f'(5)=\dfrac{2\cdot5}{2\sqrt{5^2-9}}=\dfrac{5}{\sqrt{16}}=\dfrac{5}{4}$

③ ECUACIÓN RECTA TANGENTE $\equiv y=m(x-a)+b \Rightarrow y=\dfrac{5}{4}\cdot(x-5)+4 \Rightarrow y=\dfrac{5x}{4}-\dfrac{25}{4}+4$

$\Rightarrow \boxed{y=\dfrac{5x-9}{4}}$

b) $\displaystyle\int_3^5 9x\sqrt{x^2-9}\,dx = \int_3^5 9x(x^2-9)^{1/2}dx = 9\cdot\int_3^5 x(x^2-9)^{1/2}dx = \frac{9}{2}\int_3^5 2x(x^2-9)^{1/2}dx =$

$= \left[\dfrac{9}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{(x^2-9)^{3/2}}{\frac{3}{\cancel{2}}}\right]_3^5 = \left[3(x^2-9)^{3/2}\right]_3^5 = 3\cdot(5^2-9)^{3/2}-3(3^2-9)^{3/2}$

$= 3\cdot16^{3/2} = \boxed{192}$

2021 JULIO A.3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-1 & si\ x\le 3 \\ \dfrac{3a}{x} & si\ x>3 \end{cases}$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de a es $f(x)$ derivable?
b) Para $a=1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

a) • CONTINUIDAD EN $x=3$

$\left.\begin{array}{l} f(3)=3^2-3-1=5 \\ \lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{3a}{x}=a \\ \lim\limits_{x\to3^-} x^2-x-1=5 \end{array}\right\}$ Para que sea continua en $x=3$ $\Rightarrow f(3)=\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}f(x)$ $\Rightarrow \boxed{a=5}$

$\bullet\ f'(x)\begin{cases} 2x-1 & si\ x<3 \\ \dfrac{0\cdot x-3a\cdot1}{x^2}=\dfrac{-3a}{x^2} & si\ x>3 \end{cases}$

• DERIVABILIDAD EN $x=3$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{-3\cdot a}{x^2}=\dfrac{-3\cdot5}{3^2}=\dfrac{-5}{3} \\ \lim\limits_{x\to3^-} 2x-1=2\cdot3-1=5 \end{array}\right\}$ Como $\lim\limits_{x\to3^+}f'(x)\neq\lim\limits_{x\to3^-}f'(x)$ $\boxed{\text{NO ES DERIVABLE EN } x=3}$

b) $x=1$ es menor que $3 \Rightarrow f(x)=x^2-x-1$

① $P_T(a,b)=(1,b) \Rightarrow b=f(1)=1^2-1-1=-1 \Rightarrow P_T(1,-1)$

② $m=f'(x)=2x-1 \Rightarrow f'(1)=2-1=1 \quad m=1$

③ ECUACIÓN RECTA TANGENTE $y=m(x-a)+b \Rightarrow y=1(x-1)+1 \Rightarrow \boxed{y=x}$

2021 JULIO B.2 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$

a) Halle el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
b) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$ $\boxed{\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{1\}}$

• A.V en $x=1$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{-1}{0}$ IND $\boxed{\text{Hay A.V en } x=1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{-}{+}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{-}{+}=-\infty.$

• A.H LÍMITES AL INFINITO

$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{+}{+}=\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{-}{+}=-\infty$

$\boxed{\text{No HAY A.H}}$

• A.O $y=mx+n$

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2}{x(x^2-2x+1)}=1$ $m=1$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-2x^2-x(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-1}{(x-1)^2}=0$ $n=0$

$y=mx+n \Rightarrow \boxed{y=x}$

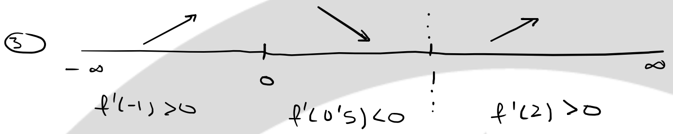
b) ① Dom $f(x)=\mathbb{R}-\{1\}$

② $f'(x)=0 \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(3x^2-4x)(x-1)^{\cancel{2}}-(x^3-2x^2)\cdot 2\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}}=\dfrac{(3x^2-4x)(x-1)-2(x^3-2x^2)}{(x-1)^3}$

$=\dfrac{3x^3-3x^2-4x^2+4x-2x^3+4x^2}{(x-1)^3}=\dfrac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3}=0 \Rightarrow x^3-3x^2+4x=0 \Rightarrow x\cdot(x^2-3x+4)=0$ ↗ $\boxed{x=0}$ ↘ $x^2-3x+4=0$

$\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot4}}{2}=\cancel{\exists}$

③


$\boxed{\begin{array}{l}\text{Crece } (-\infty,0)\cup(1,\infty)\\ \text{Decrece } (0,1)\end{array}}$

2021 JULIO B.3 (2 puntos)

Se sabe que la derivada de una función real $f(x)$ de variable real es:

$$f'(x)=3x^2+8x$$

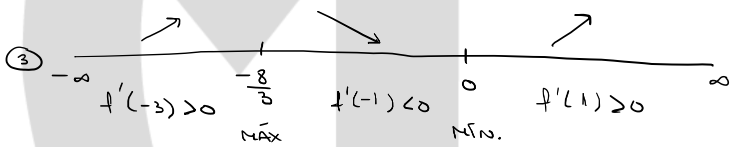
a) Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1)=11$.
b) Determine los máximos y mínimos locales de $f(x)$, si los hubiera.

a) $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2+8x)\,dx=\dfrac{3x^3}{3}+\dfrac{8x^2}{2}=x^3+4x^2+c \Rightarrow f(x)=x^3+4x^2+c$

$f(1)=11 \Rightarrow 1^3+4\cdot1^2+c=11 \Rightarrow 5+c=11 \Rightarrow c=6 \Rightarrow \boxed{f(x)=x^3+4x^2+6}$

b) ① Dom $f(x)=\mathbb{R}$

② $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+8x=0 \Rightarrow x(3x+8)=0$ ↗ $x=0$ ↘ $3x+8=0 \Rightarrow x=\dfrac{-8}{3}$

③


• $f\left(\frac{-8}{3}\right)=\left(\frac{-8}{3}\right)^3+4\cdot\left(\frac{-8}{3}\right)^2+6=\dfrac{418}{27}$

$\boxed{\text{Hay un MÁXIMO en } P\left(\tfrac{-8}{3},\tfrac{418}{27}\right)}$

• $f(0)=6$ $\boxed{\text{Hay un MÍNIMO en } P(0,6)}$

2021 JUNIO COINCIDENTES A.2 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x)=\frac{x^3}{(1-x)^2}$

a) Calcule las asíntotas de $f(x)$.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

a) $(1-x)^2=0 \Rightarrow x=1$ Dom $f(x)=\mathbb{R}-\{1\}$

• A.V en $x=1$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \frac{1}{0}$ IND $\boxed{\text{Hay A.V en } x=1}$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \frac{+}{+} = \infty$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \frac{+}{+} = \infty$

• A.H LÍMITES AL INFINITO

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = \infty \\ \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{(1-x)^2} = -\infty\end{array}\right\}$ $\boxed{\text{NO HAY A.H}}$

• A.O $y = mx + n$

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{(1-x)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2-2x+1)} = 1 \Rightarrow m = 1$

$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{(1-x)^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 - x(1-2x+x^2)}{(1-x)^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x+2x^2}{x^2-2x+1} = 2 \Rightarrow n = 2$

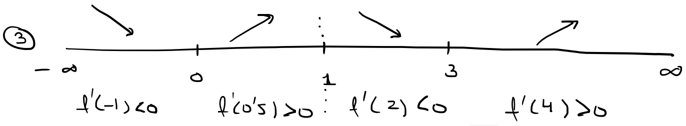
$y = mx + n \Rightarrow \boxed{y = x + 2}$

b) ① Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

② $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2(1-x)^{\cancel{2}} - x^3 \cdot 2 \cdot \cancel{(1-x)} \cdot (-1)}{(1-x)^{\cancel{4}\,3}} = 0 \Rightarrow 3x^2(1-x) - x^3 \cdot 2(-1) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x^3 + 2x^3 = 0$

$\Rightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(-x+3) = 0$ → $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$; → $-x+3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$f'(x) = \frac{-x^3+3x^2}{(1-x)^3}$

③ 

Crece $(0,1) \cup (3,\infty)$
Decrece $(-\infty,0) \cup (1,3)$

2021 JUNIO COINCIDENTES A.3 (2 puntos)

Sea $f(x) = x^2 + ax$ donde a es un parámetro real.

a) Determine el valor de a para que la función $f(x)$ tenga una primitiva $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$ y $F(2) = 9$.

b) Para $a = -2$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0, x = 3$.

a) $F(x) = \int f(x)\,dx \Rightarrow F(x) = \int (x^2 + ax)\,dx \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + c$

• $F(0) = 3 \Rightarrow \frac{0^3}{3} + \frac{a\cdot 0^2}{2} + c = 3 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + 3$

• $F(2) = 9 \Rightarrow \frac{2^3}{3} + \frac{a\cdot 2^2}{2} + 3 = 9 \Rightarrow \frac{8}{3} + 2a + 3 = 9 \Rightarrow 2a = 9 - 3 - \frac{8}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{5}{3}}$

b) $a = -2$

$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right\}$

① PUNTOS DE CORTE ENTRE FUNCIONES

$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x \\ y = 0 \end{array}\right\}$ $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x \cdot (x-2) = 0$ → $x = 0$ NO AFECTA ; → $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ AFECTA. Porque está entre $x = 0$ y $x = 3$.

$A_1 = \int_0^2 (x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) - 0 = \frac{8}{3} - 4 = \frac{-4}{3} \Rightarrow |A_1| = \frac{4}{3} u^2$

$A_2 = \int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 3^2\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2\right) = 9 - 9 - \left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3} u^2$

$A_T = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \boxed{\frac{8}{3} u^2}$

2021 JUNIO COINCIDENTES B.3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} + 2x$$

a) Calcule a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $(1, 2)$ sea paralela a la recta $y = -4x$.

b) Determine todos los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un punto de inflexión en el punto $(1, 2)$.

a) ① Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente $\Rightarrow m = f'(x) = -4$

② $f'(x) = -4 \Rightarrow 2ax + \frac{0 \cdot x - b \cdot 1}{x^2} + 2 = -4 \Rightarrow 2ax - \frac{b}{x^2} + 2 = -4$

Como el punto de tangencia es $(1,2) \Rightarrow f'(1) = -4 \Rightarrow 2a \cdot 1 - \frac{b}{1^2} + 2 = -4 \Rightarrow 2a - b = -6$

③ $f(1) = 2 \Rightarrow a \cdot 1^2 + \frac{b}{1} + 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow a + b = 0$

④ $\begin{cases} 2a - b = -6 \\ a + b = 0 \end{cases}$ (+)

$3a = -6 \Rightarrow \boxed{a = -2}$ $\quad -2 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2}$

b) $P.I(1,2) \Rightarrow f''(1) = 0 \quad f(1) = 2$

① $f(1) = 2 \Rightarrow a + b = 0$

② $f''(x) = 2a - \frac{0 \cdot x^2 - b \cdot 2x}{x^4} = 2a + \frac{b \cdot 2}{x^3} \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 2a + 2b = 0$

③ $\begin{cases} a + b = 0 \;) \times -2 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -2a - 2b = 0 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases}$ (+)

$0 = 0 \rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. NO HAY UNA ÚNICA SOLUCIÓN

• si $\boxed{b = \lambda}$

$\Rightarrow a + \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{a = -\lambda}$

2021 JUNIO A.2 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2-1}$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$

a) $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \Rightarrow \boxed{\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}}$

• AV en $x = 1$

$\lim_{x \to 1} \frac{x^3+4}{x^2-1} = \frac{5}{0}$ IND. $\boxed{\text{Hay A.V en } x = 1}$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3+4}{x^2-1} = \frac{+}{+} = \infty$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3+4}{x^2-1} = \frac{+}{-} = -\infty$

• AV en $x = -1$

$\lim_{x \to -1} \frac{x^3+4}{x^2-1} = \frac{3}{0}$ IND. $\boxed{\text{Hay A.V en } x = -1}$

$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3+4}{x^2-1} = \frac{+}{-} = -\infty$

$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3+4}{x^2-1} = \frac{+}{+} = \infty$

• A.H LÍMITES AL INFINITO

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3+4}{x^2-1} = \infty \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3+4}{x^2-1} = -\infty \Rightarrow \boxed{\text{NO HAY A.H.}}$

• A.O $\quad y = mx + n$

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3+4}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3+4}{x^3-x} = 1 \Rightarrow m = 1$

$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3+4-x(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{4+x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow n = 0$

$y = mx + n \Rightarrow \boxed{y = x}$

b) ① PUNTO DE TANGENCIA $P(a,b) = (0,b) \Rightarrow b = f(0) = \frac{0^3+4}{0^2-1} = -4 \Rightarrow P(0,-4)$

② PENDIENTE $m = f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2}$

$m = f'(0) = 0$

③ ECUACIÓN RECTA TANGENTE $y = m(x-a) + b \Rightarrow y = 0(x-0) - 4 \Rightarrow \boxed{y = -4}$

2021 JUNIO A.3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & si\ x \le 1 \\ \ln x & si\ x > 1 \end{cases}$

a) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1, x = 0$.

a) CONTINUIDAD EN $x=1$

$f(1) = 1^2 - a\cdot 1 = 1-a$

$\lim_{x\to 1^+} \ln x = \ln 1 = 0$

$\lim_{x\to 1^-} x^2 - ax = 1-a$

La función es continua cuando $f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$

$1 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$

b) $f(x) \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow$ Entre $x=-1$ y $x=0 \Rightarrow f(x) = x^2 - x$

① PUNTOS DE CORTE ENTRE $\begin{cases} f(x) = x^2 - x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$ NO AFECTAN PORQUE NO ESTÁN ENTRE $x=-1$ y $x=0$

② $A = \int_{-1}^{0} (x^2 - x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2}\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{6}\ u^2}$

2021 JUNIO B.3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = (x^2 - 3)e^x$.

a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine los extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

b) Calcule

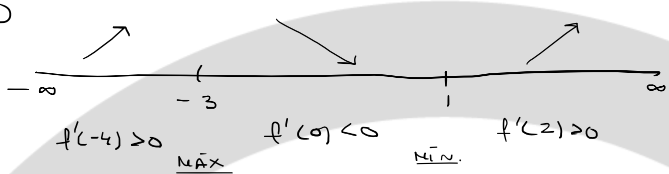
$$\int_1^2 e^{-x} f(x)\,dx$$

a) ① $\mathrm{Dom}\, f(x) = \mathbb{R}$

② $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x e^x + (x^2 - 3)e^x = 0 \Rightarrow e^x(2x + x^2 - 3) = 0 \begin{cases} e^x = 0\ \cancel{\exists} \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1 \cdot (-3)}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$ Posibles máximos o mínimos.

③ $f'(x) = e^x(2x + x^2 - 3)$



$\boxed{\begin{array}{l} \text{Crece } (-\infty, -3) \cup (1, \infty) \\ \text{Decrece } (-3, 1) \end{array}}$

• $f(-3) = ((-3)^2 - 3)\cdot e^{-3} = \frac{6}{e^3}$

• $f(1) = (1^2 - 3)\,e^1 = -2e$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{HAY UN MÁXIMO EN } P_1\left(-3, \frac{6}{e^3}\right) \\ \text{HAY UN MÍNIMO EN } P_2(1, -2e) \end{array}}$

b) $\int_1^2 e^{-x}\cdot f(x)\,dx = \int_1^2 \cancel{e^{-x}}\cdot(x^2 - 3)\cancel{e^x}\,dx = \int_1^2 (x^2 - 3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2$

$= \left(\frac{2^3}{3} - 3\cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 3\cdot 1\right) = \frac{8}{3} - 6 - \frac{1}{3} + 3 = \frac{7}{3} - 3 = \boxed{-\frac{2}{3}}$

2021 MODELO A.2 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a) Obtenga los coeficientes reales a, b y c de $f(x)$ sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 6x + 8$.

b) Para $a = 2, b = 1$ y $c = 1$, calcule la integral $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx$

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 2ax + b$

3 INCÓGNITAS = 3 CONDICIONES

① EXTREMO RELATIVO $\Rightarrow \boxed{f'(-3) = 0} \Rightarrow 2a(-3) + b = 0 \Rightarrow -6a + b = 0$

$-6a + 6 = 0$

$\boxed{a = 1}$

② $y = 6x + 8 \Rightarrow m = f'(x) = 6 \Rightarrow \boxed{f'(0) = 6} \rightarrow 2a\cdot 0 + b = 6 \Rightarrow \boxed{b = 6}$

③ El punto de tangencia $P(a,b) = P(0,b)$, también es de la recta $\Rightarrow y = 6\cdot 0 + 8 = 8 \Rightarrow P(0,8)$

$\Rightarrow \boxed{f(0)=8} \Rightarrow a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 8 \Rightarrow c = 8$

b) $f(x) = 2x^2 + x + 1$

$$\int_1^e \frac{2x^2+x+1}{x}\,dx = \int_1^e \left(\frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right)dx = \int_1^e \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + x + \ln|x|\right]_1^e$$

$$= \left(e^2 + e + \ln|e|\right) - \left(1^2 + 1 + \ln 1\right) = e^2 + e + 1 - 2 = \boxed{e^2 + e - 1}$$

2021 MODELO A.3 (2 puntos)

Dada la función

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2}$$

a) Halle el dominio de la función y sus asíntotas.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y, si los hubiera, sus extremos relativos.

a) $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \boxed{\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{0\}}$

• Para hacer asíntotas hacemos denominador común:

$f(x) = x + \frac{4}{x^2} = \frac{x^3+4}{x^2}$

• AV en $x=0$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+4}{x^2} = \frac{4}{0}$ IND. $\boxed{\text{Hay A.V en } x=0}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+4}{x^2} = \frac{+}{+} = \infty$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+4}{x^2} = \frac{+}{+} = \infty$

• A.H LÍMITES AL INFINITO

$\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+4}{x^2} = \infty$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = -\infty$

$\boxed{\text{NO HAY A.H}}$

• A.O $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0 \Rightarrow n = 0$$

$y = mx + n \Rightarrow \boxed{y = x}$

b) ① $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

② $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2\cdot x^{\cancel{2}} - (x^3+4)\cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}}} = \frac{3x^3 - (2x^3+8)}{x^3} = \frac{x^3-8}{x^3} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 8 = 0$

$x^3 = 8$

$x = \sqrt[3]{8} = 2$

③ $-\infty$ ↗ 0 ↘ 2 ↗ ∞

$f'(-1) > 0$ $\quad f'(1) < 0$ $\quad f'(3) > 0$

MÍN

$\boxed{\text{Crece } (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \quad \text{Decrece } (0, 2)}$

EXTREMO RELATIVO $f(2) = \frac{2^3+4}{2^2} = \frac{12}{4} = 3$ $\quad \boxed{\text{HAY UN MÍNIMO EN } P(2,3)}$

2021 MODELO B.3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - \frac{1}{9} & si\ x \le 0 \\ \frac{x+1}{x^2-9} & si\ x > 0 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea derivable en todo su dominio.
b) Para $a = 0$ determine, si existen, las asíntotas de $f(x)$.

a) $-\infty$ $\quad x^2 + ax - \frac{1}{9}$ $\quad 0$ $\quad \frac{x+1}{x^2-9}$ $\quad \infty$

CONTINUA $(-\infty, 0)$

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9}$ ⟨ $x = 3$; $x = -3$ ← no afecta

CONTINUA $(0, 3) \cup (3, \infty)$

$\rightarrow \boxed{\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{3\}}$

• CONTINUIDAD EN $x=0$

$f(0) = -\frac{1}{9}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x^2-9} = -\frac{1}{9}$

$\lim_{x\to 0^-} x^2+ax-\frac{1}{9} = -\frac{1}{9}$

Como $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-}$

CONTINUA EN $x=0$ ✓

$$f'(x)\begin{cases} 2x+a & si\ x<0 \\ \frac{1(x^2-9)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-x^2-2x-9}{(x^2-9)^2} & si\ x>0 \end{cases}$$

• DERIVABILIDAD EN $x=0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2-2x-9}{(x^2-9)^2} = \frac{-9}{81} = -\frac{1}{9}$

$\lim_{x\to 0^-} 2x+a = a$

Para que sea derivable en $x=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$

$\boxed{-\frac{1}{9} = a}$

b) $$f(x) = \begin{cases} x^2-\frac{1}{9} & si\ x\le 0 \\ \frac{x+1}{x^2-9} & si\ x>0 \end{cases}$$

① $Dom f(x) = \mathbb{R} - \{3\}$

• A.V en $x=3$

$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x^2-9} = \frac{4}{0}$ IND. $\boxed{\text{Hay A.V en } x=3}$

$\lim_{x\to 3^+} \frac{x+1}{x^2-9} = \frac{+}{+} = \infty$

$\lim_{x\to 3^-} \frac{x+1}{x^2-9} = \frac{+}{-} = -\infty$

• A.H LÍMITES AL INFINITO

$\lim_{x\to \infty} \frac{x+1}{x^2-9} = 0 \longrightarrow$ $\boxed{\text{Hay A.H en } y=0 \text{ cuando } x\to\infty.}$

$\lim_{x\to -\infty} x^2-\frac{1}{9} = \infty$

• A.O $y = mx+n$

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ = NO HAY PORQUE HAY A.H

$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-\frac{1}{9}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{9x^2-1}{9x} = -\infty$ $\boxed{\text{NO HAY A.O.}}$

2020 SEPTIEMBRE A.3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{2x^2+1} & si\ x<1 \\ 2m+\ln x & si\ x\ge 1 \end{cases}$$

a) Estudie los valores del parámetro $m\in\mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en $x=1$ y calcule la derivada de la función para $x<1$.

b) Halle el área de la región del plano delimitada por la curva $y=f(x)$, las rectas $x=-1, x=0$ y el eje OX.

a) • CONTINUIDAD EN $x=1$

$f(1) = 2m + \ln 1 = 2m$

$\lim_{x\to 1^+} 2m+\ln 1 = 2m$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{6x}{2x^2+1} = \frac{6}{3} = 2$

Para que sea continua en $x=1 \Rightarrow f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$

$2m = 2 \Rightarrow \boxed{m=1}$

• Para $x<1 \Rightarrow f(x) = \frac{6x}{2x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{6\cdot(2x^2+1)-6x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{12x^2+6-24x^2}{(2x^2+1)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-12x^2+6}{(2x^2+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-6(2x^2+1)}{(2x^2+1)^2} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-6}{2x^2+1}}$

b). Entre $x=-1$ y $x=0 \Rightarrow f(x) = \frac{6x}{2x^2+1}$

• $f(x) = \frac{6x}{2x^2+1}$, $y=0$, $x=-1$, $x=0$

① PUNTOS DE CORTE ENTRE $\begin{cases} f(x) = \frac{6x}{2x^2+1} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{6x}{2x^2+1} = 0 \Rightarrow 6x=0$

$x=0$ NO AFECTA

($x=0$ NO ESTÁ ENTRE $x=-1$ y $x=0$)

② $A = \int_{-1}^{0} \frac{6x}{2x^2+1}dx = 6\int_{-1}^{0}\frac{x}{2x^2+1}dx = \frac{6}{4}\int_{-1}^{0}\frac{4x}{2x^2+1}dx$

$= \frac{6}{4}\left[\ln|2x^2+1|\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{2}\left(\ln|1| - \ln|3|\right) = \frac{3}{2}\cdot(-\ln 3)$

$$\boxed{|A| = \frac{3}{2}\ln 3\ u^2}$$

2020 SEPTIEMBRE B.1 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{ax^2-3}{x^2-5}$

a) Calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ tenga una asíntota horizontal en $y = -1$.

b) Para $a = 1$, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y los extremos relativos, si existen.

a) la A.H se saca haciendo límite al infinito:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2-3}{x^2-5} = a \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

b) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-5}$ ① $x^2-5=0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ $\quad \text{Dom} f(x) = \mathbb{R} - \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

② $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2-5)-(x^2-3)\cdot 2x}{(x^2-5)^2} = \frac{2x^3-10x-2x^3+6x}{(x^2-5)^2} = \frac{-4x}{(x^2-5)^2}$

$\Rightarrow \frac{-4x}{(x^2-5)^2} = 0 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0$ posible máximo o mínimo.

③ $-\infty \quad -\sqrt{5} \quad 0 \quad \sqrt{5} \quad \infty$

$f'(-3)>0 \quad f'(-1) \quad f'(1) \quad f'(3)$

MÁX

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Crece } (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, 0) \\ \text{Decrece } (0, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty) \end{array}}$$

④ EXTREMO RELATIVO: $f(0) = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$ $\boxed{\text{HAY UN MÁXIMO EN } P\left(0, \tfrac{3}{5}\right)}$

2020 JULIO COINCIDENTES A.3 (2 puntos)

Considere la función real de variable real

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que el punto de abscisa $x = -1$ de la función $f(x)$ sea un máximo relativo.

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para $a = 1$.

a) Para que tenga un máximo $\Rightarrow f'(-1) = 0$

$f'(x) = 6x^2 + 2ax \Rightarrow 6\cdot(-1)^2 + 2a(-1) = 0 \Rightarrow 6 - 2a = 0 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow \boxed{a=3}$

b) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 1$ ① $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R}$

② $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 2x \Rightarrow 6x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(6x+2) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$ posibles máx o mín.

③ $-\infty \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad \infty$

$f'(-1)>0 \quad f'(-0'1)<0 \quad f'(1)>0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Crece } (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (0, \infty) \\ \text{Decrece } (-\frac{1}{3}, 0) \end{array}}$$

2020 JULIO COINCIDENTES B.2 (2 puntos)

Considere la función real de variable real:

$$f(x) = ax^3 - x^2 - x + a$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que haya un punto de inflexión en $x = 1$.

b) Para $a = 2$, calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

a) Para que haya un punto de inflexión $f''(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 - 2x - 1$; $f''(x) = 6ax - 2 \Rightarrow 6\cdot a\cdot 1 - 2 = 0 \Rightarrow 6a = 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{3}}$

b) $f(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

① PUNTOS DE CORTE ENTRE $\begin{cases} f(x) = 2x^3 - x^2 - x + 2 \\ y = 0 \end{cases}$ $2x^3 - x^2 - x + 2 = 0$ RUFFINI

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & -1 & 2 \\ x=-1 & & -2 & 3 & -2 \\ \hline & 2 & -3 & 2 & \boxed{0} \end{array} \rightarrow 2x^2 - 3x + 2 = 0 \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2} = \cancel{\exists}$$

NO AFECTA PORQUE NO ESTÁ ENTRE $x=0$ y $x=1$

② $A = \int_0^1 (2x^3 - x^2 - x + 2)\,dx = \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - 0$

$= -\frac{1}{3} + 2 = \frac{6}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{3}\,u^2}$

2020 JULIO COINCIDENTES B.3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} & si\ x > 1 \\ x^2 & si\ x \le 1 \end{cases}$$

a) Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$. ¿Es la función $f(x)$ continua en todo su dominio?
b) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

a) • $\lim_{x\to 1} x^2 = \boxed{1}$

• En $f(x)_1 = \frac{x^2-4x+3}{x^2-1}$ si $x>1 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x = \pm 1 \rightarrow$ No afecta. CONTINUA $(1, \infty)$

• En $f(x)_2 = x^2$ si $x \le 1 \Rightarrow$ CONTINUA $(-\infty, 1]$

• CONTINUIDAD EN $x = 1$

• $f(1) = 1$

• $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = \frac{0}{0}$ IND $\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-3)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-3}{x+1} = \frac{-2}{2} = -1$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$

• $\lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$

Para que sea continua en $x=1 \Rightarrow$ $f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$

$1 \neq -1$

NO ES CONTINUA EN $x = 1$

$\boxed{\text{La función no es continua en todo su dominio.}}$

b) • A.V $\boxed{\text{No hay A.V}}$

• AH LÍMITES AL INFINITO

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} = 1 \longrightarrow \boxed{\text{Hay A.H en } y=1 \text{ cuando } x\to\infty}$

$\lim_{x\to -\infty} x^2 = \infty \longrightarrow$ No hay A.H

• A.O $y = mx + n$

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \boxed{\text{No hay A.O cuando } x\to\infty \text{ porque hay A.H}}$

$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty \rightarrow \boxed{\text{No hay A.O cuando } x\to-\infty.}$

2020 JULIO A.2 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4$$

a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x = 0$ para que la función anterior sea continua en ese punto.
b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

a) • $3x + x^2 = 0 \Rightarrow x(3+x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 3 + x = 0 \rightarrow x = -3 \end{cases}$ $\boxed{\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-3, 0\}}$

• Para que sea continua $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4=\lim_{x\to 0}\frac{0}{0}+4=IND \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}(4-x^2)}{\cancel{x}(3+x)}+4=\lim_{x\to 0}\frac{4-x^2}{3+x}+4=\frac{4}{3}+4=\frac{16}{3}$$

$\boxed{\text{Para que sea continua } f(0)=\frac{16}{3}.}$

b) $Dom\ f(x)=\mathbb{R}-\{-3,0\}$

• A.V en $x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4-x^2}{3+x}+4=\frac{16}{3}\quad \boxed{\text{No hay A.V en } x=0.}$$

• A.V en $x=-3$

$$\lim_{x\to -3}\frac{4-x^2}{3+x}+4=\frac{15}{0}+4=IND\quad \boxed{\text{Hay A.V en } x=-3}$$

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{4-x^2}{3+x}+4=\frac{+}{-}+4=-\infty$$

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{4-x^2}{3+x}+4=\frac{+}{+}+4=+\infty.$$

• A.H LÍMITES AL INFINITO

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{3+x}+4=-\infty\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{4-x^2}{3+x}+4=\infty\quad\rightarrow \boxed{\text{NO HAY A.H.}}$$

• A.O $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4-x^2}{3+x}+4}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4-x^2+12+4x}{3+x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+4x+16}{3x+x^2}=-1\Rightarrow m=-1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4-x^2}{3+x}+4+x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4-x^2+12+4x+3x+x^2}{3+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{7x+16}{3+x}=7\Rightarrow n=7$$

$$y=mx+n\rightarrow \boxed{y=-x+7}$$

2020 JULIO A.3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x)=-x^4+x^3+2x^2$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x=-1$.
b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x>0$.

a) ① PUNTO DE TANGENCIA $P(a,b)=(-1,b)\Rightarrow b=f(-1)=-(-1)^4+(-1)^3+2(-1)^2=-1-1+2=0$

$P(-1,0)$

② $m=f'(x)=-4x^3+3x^2+4x\Rightarrow m=f'(-1)=-4(-1)^3+3(-1)^2+4\cdot(-1)=4+3-4=3$

③ ECUACIÓN RECTA TANGENTE $y=m(x-a)+b\Rightarrow y=3(x+1)+0\Rightarrow \boxed{y=3x+3}$

b) $\left.\begin{array}{l}f(x)=-x^4+x^3+2x^2\\ y=0\end{array}\right\}$ ① PUNTOS DE CORTE:

$$-x^4+x^3+2x^2=0\Rightarrow x^2\cdot(-x^2+x+2)=0 \begin{cases} x^2=0\Rightarrow \boxed{x=0}\\ -x^2+x+2=0\end{cases}$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-1)\cdot 2}}{2\cdot(-1)}=\frac{-1\pm 3}{=2}\ \begin{cases}\boxed{x=-1}\\ \boxed{x=2}\end{cases}$$

② Tenemos $x=-1$, $x=0$ y $x=2$, pero solo haremos el área con los valores de $x>0$.

$$A=\int_0^2(-x^4+x^3+2x^2)\,dx=\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right]_0^2$$

$$=-\frac{2^5}{5}+\frac{2^4}{4}+\frac{2\cdot 2^3}{3}-0=\boxed{\frac{44}{15}u^2}$$

2020 MODELO A.2 (2 puntos)

Se considera la función de variable real $f(x)$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}-x+a & x<-8\\ \sqrt[3]{x} & -8\le x<1\\ lnx & x\ge 1\end{cases}$$

Donde ln denota el logaritmo neperiano y $a\in\mathbb{R}$. Se pide:
a) Proporcionar el valor del parámetro a para que la función anterior sea continua en el punto de abscisa $x=-8$ y analizar la continuidad de la función en el resto de los puntos de su dominio.
b) Obtener la recta tangente a la función en el punto $x=e$ y estudiar el crecimiento/decrecimiento de esta recta. Justifique su respuesta.

a) • CONTINUIDAD EN $x=-8$

$f(-8)=\sqrt[3]{-8}=-2$

$\lim_{x\to -8^+} \sqrt[3]{x}=-2$

$\lim_{x\to -8^-} -x+a=8+a$

Para que sea continua en $x=-8 \Rightarrow$

$f(-8)=\lim_{x\to -8^+} f(x)=\lim_{x\to -8^-} f(x)$

$-2=8+a \Rightarrow \boxed{a=-10}$

• CONTINUIDAD EN $x=1$

$f(1)=\ln 1=0$

$\lim_{x\to 1^+} \ln x=0$

$\lim_{x\to 1^-} \sqrt[3]{x}=1$

NO CONTINUA EN $x=1$

• $-x-10$ | $\sqrt[3]{x}$ | $\ln x$; $-\infty$, -8, 1, ∞

CONTINUA $(-\infty,-8)$ CONTINUA $(-8,1)$ $x>0$ CONTINUA $(1,\infty)$

$\boxed{\text{La función } f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} \text{ menos en } x=1.}$

b) ① PTO DE TANGENCIA $P(a,b)=P(e,b) \Rightarrow b=f(e)=\ln e=1 \Rightarrow P(e,1)$

② $m=f'(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow m=f'(e)=\frac{1}{e}$

③ ECUACIÓN RECTA TANGENTE $y=m(x-a)+b \Rightarrow y=\frac{1}{e}(x-e)+1 \Rightarrow y=\frac{x}{e}-1+\frac{1}{e}$

$\Rightarrow \boxed{y=\frac{x-e+1}{e}}$

• Como $m=\frac{1}{e}>0$ $\boxed{\text{La recta es creciente en } (-\infty,\infty)}$

2020 MODELO A.3 (2 puntos)

Dada la curva

$$f(x)=x^2+4x-5$$

a) Halle el punto en el que la recta tangente a la curva es paralela a la recta $y-6x+1=0$, indicando su abscisa y ordenada.
b) Calcule el área del recinto acotado del plano limitado por la gráfica de $f(x)$ y la curva $g(x)=-x^2+4x+3$.

a) Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente: $y=6x-1 \Rightarrow m=6$

Como $m=f'(x) \Rightarrow f'(x)=2x+4 \Rightarrow 2x+4=6 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$

Por tanto, el punto de tangencia $=P(1,b) \Rightarrow b=f(1)=1^2+4\cdot 1-5=0 \Rightarrow \boxed{P(1,0)}$

$\boxed{\text{ABSCISA } x=1 \text{ , ORDENADA } y=0.}$

b) $f(x)=x^2+4x-5$
$g(x)=-x^2+4x+3$

① PUNTOS DE CORTE

$x^2+4x-5=-x^2+4x+3 \Rightarrow 2x^2-8=0 \Rightarrow 2x^2=8 \Rightarrow x^2=4$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{4}$; $x=2$, $x=-2$

② $A=\int_{-2}^{2}\left((x^2+4x-5)-(-x^2+4x+3)\right)dx=\int_{-2}^{2}(2x^2-8)\,dx=\left[\frac{2x^3}{3}-8x\right]_{-2}^{2}$

$=\left(\frac{2\cdot 2^3}{3}-8\cdot 2\right)-\left(\frac{2\cdot(-2)^3}{3}-8\cdot(-2)\right)=\frac{16}{3}-16+\frac{16}{3}-16=\frac{32}{3}-32=\frac{-64}{3}$

$\boxed{|A|=\frac{64}{3}u^2}$

2020 MODELO B.3 (2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x)$ definida por:

$$f(x)=\sqrt{2}xe^{-x^2}$$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
b) Halle el área del recinto acotado del plano delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

a) ① Dom $f(x)=\mathbb{R}$

② $f'(x)=0$. $\Rightarrow f'(x)=\sqrt{2}e^{-x^2}+\sqrt{2}x\cdot(-2x)e^{-x^2}=\sqrt{2}e^{-x^2}-2\sqrt{2}x^2e^{-x^2}$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow e^{-x^2}\cdot(\sqrt{2}-2\sqrt{2}x^2)=0$; $e^{-x^2}=0$ ✗

$\sqrt{2}-2\sqrt{2}x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}}$

③

$$\begin{array}{ccccccc} -\infty & \searrow & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \nearrow & \frac{\sqrt{2}}{2} & \searrow & \infty \\ & f'(-1)<0 & & f'(0)>0 & & f'(1)<0 & \\ & & \underline{\text{MÍN}} & & \underline{\text{MÁX}} & & \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Crece } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \text{Decrece } \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right) \end{array}}$$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2}xe^{-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2}x}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty}$ IND $\Rightarrow$ L'H

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{2xe^{x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\infty} = \boxed{0}$

b) $f(x) = \sqrt{2}\,x\,e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = -1$

① PUNTOS DE CORTE $\sqrt{2}x \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{AFECTA PORQUE ESTÁ ENTRE } x=-1 \text{ y } x=1. \\ e^{-x^2} = 0 \ \nexists \end{cases}$

② $A_1 = \int_{-1}^{0} \sqrt{2}x\,e^{-x^2}dx = \sqrt{2}\int_{-1}^{0} x\,e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{-2}\cdot\int_{-1}^{0} -2x\,e^{-x^2}dx = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-x^2}\right]_{-1}^{0} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{0}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1}\right)$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1} = -0'447\,u^2 \Rightarrow |A_1| = 0'447\,u^2$

$A_2 = \int_{0}^{1} \sqrt{2}x\,e^{-x^2}dx = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-x^2}\right]_{0}^{1} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{0}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0'447\,u^2$

$A_T = A_1 + A_2 = \boxed{0'894\,u^2}$