2023 MODELO A. 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Una empresa complementa el sueldo de sus empleados según la consecución de ciertos objetivos valorados en función de una puntuación que sigue una distribución normal N(100; 35). Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el porcentaje de empleados con una puntuación comprendida entre 100 y 140.

b) (0.75 puntos) Hallar la probabilidad de que un trabajador obtenga una puntuación inferior a 95 puntos.

c) (1 punto) Determinar la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos si el 75.17 % de la plantilla ha recibido dicho incentivo.

a) $\mu = 100$, $\sigma = 35$

$$P(100 \le x \le 140) = P\left(\frac{100-100}{35} \le z \le \frac{140-100}{35}\right) = P(0 \le z \le 1{,}14)$$

$$= P(z \le 1{,}14) - P(z \le 0) = 0{,}8729 - 0{,}5 = \boxed{0{,}3729}$$

b) $P(x < 95) = P\left(x < \frac{95-100}{35}\right) = P(x < -0{,}14) = 1 - P(x < 0{,}14) = 1 - 0{,}5557 = \boxed{0{,}4443}$

c) $P(x \ge K) = 0{,}7517 \Rightarrow P\left(z \ge \frac{K-100}{35}\right) = 0{,}7517 \Rightarrow P\left(z \le \frac{-K+100}{35}\right) = 0{,}7517$

$\Rightarrow \frac{-K+100}{35} = 0{,}68 \Rightarrow -K + 100 = 0{,}68 \cdot 35 \Rightarrow -K = 0{,}68 \cdot 35 - 100 \Rightarrow K = 76{,}2$

$\boxed{\text{La puntuación máxima para cobrar los objetivos es } 76{,}2.}$

2023 MODELO B. 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sabiendo que P(A ∪ B) = 4/5 , P($\bar{A}$) = 9/20 y P($\bar{B}$) = 7/20 , se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular razonadamente P($\bar{A} \cap \bar{B}$).

b) (0.75 puntos) Calcular razonadamente P($\bar{A} \cup \bar{B}$).

c) (0.5 puntos) Calcular razonadamente P(A − B).

d) (0.5 puntos) Determinar si A y B son sucesos independientes.

NOTA: $\bar{A}$ y A − B denotan, respectivamente, el suceso contrario de A y el suceso diferencia de A y B.

a) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{4}{5} = \boxed{\frac{1}{5}}$

b) • $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$ • $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{7}{20} = \frac{13}{20}$

• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{11}{20} + \frac{13}{20} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{24}{20} - \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$

• $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) \Rightarrow P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

c) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{11}{20} - \frac{2}{5} = \boxed{\frac{3}{20}}$

d) Para que sean independientes A y B se debe cumplir $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{11}{20} \cdot \frac{13}{20} \Rightarrow \frac{2}{5} \neq \frac{143}{400} \Rightarrow \boxed{\text{NO SON INDEPENDIENTES}}$

2022 JUNIO COINCIDENTES A. 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

En una tienda se hace un estudio sobre la venta de dos productos A y B a lo largo de un mes. La probabilidad de que un cliente compre el producto A es de un 62% y la de que compre el producto B es de un 40%. Se observa, además, que el 12% de los clientes compran al mismo tiempo el producto A y el producto B. Se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente haya comprado el producto A sabiendo que no ha adquirido el producto B.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente no compre ni el producto A ni el producto B.

c) (1 punto) Sabiendo que a lo largo de un mes visitan la tienda 3000 personas, calcular, utilizando la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución normal, cuál es la probabilidad de que compren el producto B más de 1250 personas.

a) $P(A) = 0{,}62$; $P(B) = 0{,}40$; $P(A \cap B) = 0{,}12$

• $P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0{,}62 - 0{,}12}{1 - 0{,}4} = \boxed{0'83}$

b) • $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}62 + 0{,}40 - 0{,}12 = 0'90$

• $P(\text{ni } A \text{ ni } B) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0'90 = \boxed{0'1}$

c) $n = 3000 > 10$ ✓
$p = 0{,}40$
$q = 1 - p = 0{,}60$

$n \cdot p = 3000 \cdot 0{,}4 = 1200 > 5$ ✓
$n \cdot q = 3000 \cdot 0{,}6 = 1800 > 5$ ✓

Podemos aproximar a la Normal.

- $\mu = n \cdot p = 1200$
- $\delta = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{3000 \cdot 0'4 \cdot 0'6} = 26,83$
- $P(x' > 1250) = P(x > 1250,5) = P\left(z > \dfrac{1250,5 - 1200}{26,83}\right) = P(z > 1,88) =$

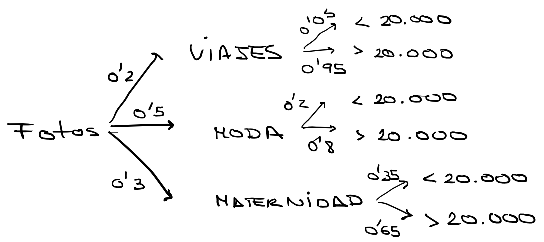
$$= 1 - P(z < 1,88) = 1 - 0,9699 = \boxed{0,0301}$$

2022 JUNIO COINCIDENTES B. 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Una *influencer* famosa publica en su Instagram un 20% de fotografías dedicadas a viajes, un 50% referentes a temas de moda y el resto sobre maternidad. El 5% de las publicaciones de viajes reciben menos de 20 000 *Me gusta* y lo mismo ocurre con el 20% de las de moda y con el 35% de las que tratan asuntos de maternidad. Elegida una fotografía al azar, se pide:

a) (1,25 puntos) Determinar la probabilidad de que tenga más de 20 000 *Me gusta*.

b) (1,25 puntos) Si tiene menos de 20 000 *Me gusta*, calcular la probabilidad de que el tema tratado en ella haya sido sobre viajes.



a) $P(>20.000) = P(V) \cdot P(>20.000/V) + P(M) \cdot P(>20.000/M)$

$+ P(MA) \cdot P(>20.000/MA) = 0,2 \cdot 0'95 + 0,5 \cdot 0'8$

$+ 0,3 \cdot 0'65 = \boxed{0'785}$

b) $P(V/<20.000) = \dfrac{P(V) \cdot P(<20.000/V)}{P(<20.000)} = \dfrac{0,2 \cdot 0,05}{1 - 0,785} = \boxed{0,0465}$

2022 JUNIO A. 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27,7%. Se reunieron 10 de estos consejeros.

a) (0,75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.

b) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.

c) (1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35% de representación femenina.

BINOMIAL $n = 10$ $\quad P_{MUJER} = 0'277 \quad B(10; 0'277) \quad q = 1 - 0'277 = 0'723$

a) $P(x = 5) = \binom{10}{5} \cdot 0'277^5 \cdot 0'723^{10-5} = 252 \cdot 0'277^5 \cdot 0'723^5 = \boxed{0'0812}$

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = 252$$

b) $n = 10$ $\quad P_{HOMBRE} = 0'723 \quad q = 1 - 0'723 = 0'277$

$$P(x=0) = \binom{10}{0} \cdot 0'723^0 \cdot 0'277^{10-0} = 2'66 \cdot 10^{-6}$$

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - 2'66 \cdot 10^{-6} = \boxed{0'999997}$$

c) $n = 200 > 10 \checkmark$ $\quad$ MUJERES $= 0'35 \cdot 200 = 70$ $\quad p = 0'277 \quad q = 0'723$

$\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 200 \cdot 0'277 = 55'4 > 5 \checkmark \\ n \cdot q = 200 \cdot 0'723 = 144'6 > 5 \checkmark \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \mu = n \cdot p = 55'4 \\ \delta = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{200 \cdot 0'277 \cdot 0'723} = 6'329 \end{array}$

$$P(x \geq 70) = P(x' \geq 69'5) = P\left(z \geq \frac{69'5 - 55'4}{6'329}\right) = P(z \geq 2'23) = 1 - 0'9871 = \boxed{0'0129}$$

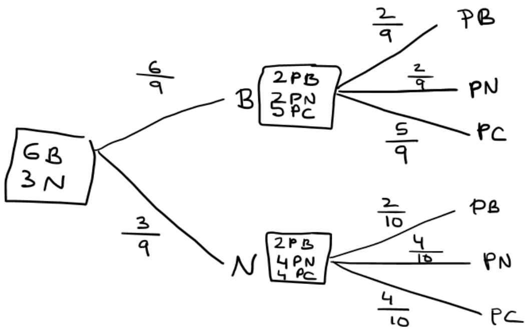
2022 JUNIO B. 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

De una cesta con 6 sombreros blancos y 3 negros se elige uno al azar. Si el sombrero es blanco, se toma, al azar, un pañuelo de un cajón que contiene 2 blancos, 2 negros y 5 con cuadros blancos y negros. Si el sombrero es negro, se elige, al azar, un pañuelo de otro cajón que contiene 2 pañuelos blancos, 4 negros y 4 con cuadros blancos y negros. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que en el pañuelo aparezca algún color que no sea del sombrero.

b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que en al menos uno de los complementos (sombrero o pañuelo) aparezca el color negro.

c) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el sombrero haya sido negro, sabiendo que el pañuelo ha sido de cuadros.



a) $P(\text{pañuelo con color distinto al del sombrero}) =$

$P(B)\cdot P(PN/B) + P(B)\cdot P(PC/B) + P(N)\cdot P(PB/N) + P(N)\cdot P(PC/N)$

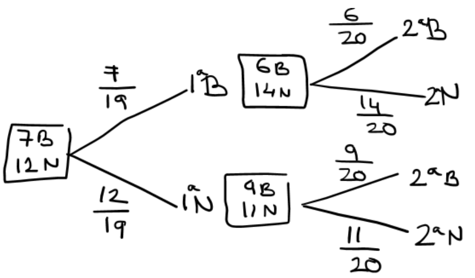
$= \frac{6}{9}\cdot\frac{2}{9} + \frac{6}{9}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{10} + \frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10} = \boxed{\frac{97}{135}}$

b) $P(PN \cup SN) = P(B)\cdot P(PN/B) + P(N)$
$= \frac{6}{9}\cdot\frac{2}{9} + \frac{3}{9}\cdot 1 = \boxed{\frac{13}{27}}$

c) $P(N/PC) = \frac{P(N\cap PC)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{9}\cdot\frac{4}{10}} = \boxed{\frac{9}{34}}$

2022 MODELO A. 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Una urna contiene 7 bolas blancas y 12 bolas negras. Se extrae al azar una bola de la urna y se sustituye por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola de la urna. Se pide:
a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca.
b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea de distinto color que la primera.
c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido negra, sabiendo que la segunda bola fue blanco.



a) $P(2^aB) = P(1^aB)\cdot P(2^aB/1^aB) + P(1^aN)\cdot P(2^aB/1^aN)$
$= \frac{7}{19}\cdot\frac{6}{20} + \frac{12}{19}\cdot\frac{9}{20} = \boxed{\frac{15}{38}}$

b) $P(\text{distinto color}) = P(1^aB)\cdot P(2^aN/1^aB) + P(1^aN)\cdot P(2^aB/1^aN)$
$= \frac{7}{19}\cdot\frac{14}{20} + \frac{12}{19}\cdot\frac{9}{20} = \boxed{\frac{103}{190}}$

c) $P(1^aN/2^aB) = \frac{P(1^aN\cap 2^aB)}{P(2^aB)} = \frac{\frac{12}{19}\cdot\frac{9}{20}}{\frac{15}{38}} = \boxed{\frac{18}{25}}$

2022 MODELO B. 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dos características genéticas A y B aparecen en una especie animal con probabilidades respectivas de 0.2 y 0.3. Sabiendo que la aparición de una de ellas es independiente de la aparición de la otra, se pide calcular:
a) (0.5 puntos) La probabilidad de que un individuo elegido al azar presente ambas características.
b) (0.5 puntos) La probabilidad de que no presente ninguna de ellas.
c) (0.75 puntos) La probabilidad de que presente solamente una de ellas.
d) (0.75 puntos) La probabilidad de que, si elegimos al azar 10 individuos, exactamente 3 de ellos presenten la característica A.

$P(A) = 0'2 \quad P(B) = 0'3 \quad$ A y B son sucesos independientes.

a) Como son independientes, puedo utilizar $P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)$
$P(A\cap B) = 0'2\cdot 0'3 = \boxed{0'06}$

b) $P(\text{ni } A \text{ ni } B) = P(\bar{A}\cap\bar{B}) \qquad P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0'44 = \boxed{0'56}$
$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0'2 + 0'3 - 0'06 = 0'44$

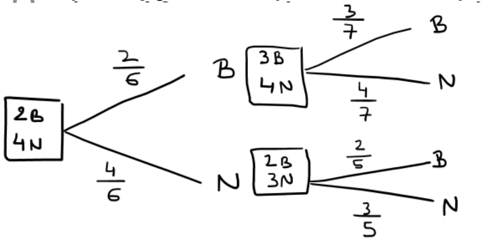
c) $P(\text{solo } A \cup \text{solo } B) = 0'14 + 0'24 = \boxed{0'38}$
$P(\text{solo } A) = P(A\cap\bar{B}) = P(A) - P(A\cap B) = 0'2 - 0'06 = 0'14$
$P(\text{solo } B) = P(B\cap\bar{A}) = P(B) - P(A\cap B) = 0'3 - 0'06 = 0'24$

d) BINOMIAL $n = 10 \quad p_A = 0'2 \quad q = 1 - p = 0'8$
$P(X=2) = \binom{10}{2}\cdot 0'2^2\cdot 0'8^{10-2} = 45\cdot 0'2^2\cdot 0'8^8 = \boxed{0'302}$

2021 JULIO A. 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

En una urna hay dos bolas blancas y cuatro bolas negras. Se extrae una bola al azar. Si la bola extraída es blanca, se devuelve a la urna y se añade otra bola blanca; si es negra, no se devuelve a la urna. A continuación, se vuelve a extraer una bola al azar de la urna.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color?
b) (1,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra, sabiendo que la segunda ha sido blanca?



a) $P(\text{distinto color}) = P(1^aB)\cdot P(2^aN/1^aB) + P(1^aN)\cdot P(2^aB/1^aN)$
$= \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{7} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} = \boxed{\frac{16}{35}}$

b) $P(1^aN/2^aB) = \dfrac{P(1^aN \cap 2^aB)}{P(2^aB)} = \dfrac{\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}} = \boxed{\frac{28}{43}}$

2021 JULIO B. 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45% de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.
a) (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.
b) (1,5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

BINOMIAL $n=100$ $\quad P_{LLUVIA} = 0'45$ $\quad q = 1-0'45 = 0'55$ $\quad B(100; 0'45)$

a) $P(x=40) = \binom{100}{40}\cdot 0'45^{40}\cdot 0'55^{100-40} = \boxed{0'0488}$

b) $n = 100 \geq 10$ ✓
$n\cdot p = 100\cdot 0'45 = 45 > 5$ ✓
$n\cdot q = 100\cdot 0'55 = 55 > 5$ ✓

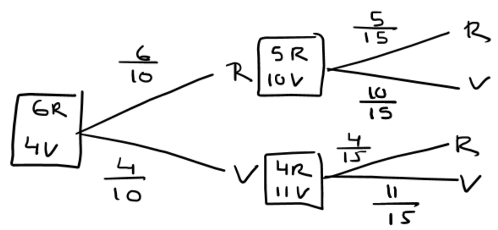
$\mu = n\cdot p = 45$
$\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q} = \sqrt{100\cdot 0'45\cdot 0'55} = 7'036$ $\quad N(45; 7'036)$

$P(x=40) = P(39'5 < x < 40'5) = P\left(\frac{39'5-45}{7'036} < z < \frac{40'5-45}{7'036}\right) = P(-0'78 < z < -0'64)$

$= P(z<0'78) - P(z<0'64) = 0'7823 - 0'7389 = \boxed{0'0434}$

2021 JUNIO COINCIDENTES A. 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

En el primer cajón de una mesita de noche hay 6 calcetines rojos y 4 verdes. En el segundo cajón de dicha mesita hay 4 calcetines rojos y 10 verdes. Se extrae aleatoriamente uno de los calcetines del primer cajón para introducirlo en el segundo cajón. Se extraen posteriormente dos calcetines del segundo cajón. Calcule la probabilidad de que estos dos calcetines sean del mismo color.



$P(\text{mismo color}) = P(1^oR)\cdot P(2^oR/1^oR) + P(1^oV)\cdot P(2^oV/1^oV)$
$= \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{15} + \frac{4}{10}\cdot\frac{11}{15} = \boxed{\frac{37}{75}}$

2021 JUNIO COINCIDENTES B. 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

El delantero de un equipo de fútbol, que suele marcar en tres quintas partes de sus disparos a puerta, ha de lanzar una tanda de penaltis en un entrenamiento.
a) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de no marcar si la tanda es de cuatro disparos.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que marque más de dos penaltis en la tanda de cuatro disparos.
c) (1 punto) Calcule cuántos penaltis debería lanzar para que la probabilidad de marcar al menos un tanto sea mayor que 0,999.

$P_{MARCA} = \frac{3}{5} = 0'6$ BINOMIAL $B(4, 0'6)$

a) $n=4$ $q = 1-p = 1-0'6 = 0'4$

$$P(x=0) = \binom{4}{0} \cdot 0'6^0 \cdot 0'4^{4-0} = 1 \cdot 0'6^0 \cdot 0'4^4 = \boxed{0'0256}$$

b) $P(x>2) = P(x=3) + P(x=4) = 0'3456 + 0'1296 = 0'4752$

$$P(x=3) = \binom{4}{3} \cdot 0'6^3 \cdot 0'4^{4-3} = 0'3456$$

$$P(x=4) = \binom{4}{4} \cdot 0'6^4 \cdot 0'4^{4-4} = 0'1296$$

c) ¿n? $P(x \geq 1) = 0'999 \Rightarrow P(x\geq 1) = 1 - P(x=0) \Rightarrow P(x=0) = 0'001$

$P(x=0) = \binom{n}{0} \cdot 0'6^0 \cdot 0'4^{n-0} = 0'001 \Rightarrow$ { Tenemos que saber que $\binom{n}{0} = 1$; $0'6^0 = 1$ } $\Rightarrow 0'4^n = 0'001$

$0'4^n = 0'001 \Rightarrow \ln 0'4^n = \ln 0'001 \Rightarrow n \cdot \ln 0'4 = \ln 0'001 \quad n = \frac{\ln 0'001}{\ln 0'4} = 7'538 \quad \boxed{n=8}$

2021 JUNIO A. 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) (1 punto) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

c) (0,5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8,8-c, 8.8+c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98% de los individuos de esta especie?

$\mu = 8'8 \quad \sigma = 3$

a) $P(x>10) = P\left(z > \frac{10-8'8}{3}\right) = P(z>0'4) = 1 - P(z<0'4) = 1 - 0'6554 = 0'3446$

$34'46\%$

$P(7<x<10) = P\left(\frac{7-8'8}{3} < z < \frac{10-8'8}{3}\right) = P(-0'6 < z < 0'4) = P(z<0'4) - [1 - P(z<0'6)]$

$= 0'6554 - (1 - 0'7257) = 0'3811 \quad \boxed{38'11\%}$

b) $n=4$ ¡CUIDADO! $P_{\text{SUPERE 10 MESES}} = 0'3446 \quad P_{\text{NO SUPERE 10}} = 0'6554$

BINOMIAL { $n=4$; $p = 0'6554$; $q = 1-p = 0'3446$ } $\quad P(x\geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - 0'0141 = \boxed{0'9859}$

$P(x=0) = \binom{4}{0} \cdot 0'6554^0 \cdot 0'3446^{4-0} = 0'0141$

c) $(8'8-c \,;\, 8'8+c)$

NORMAL { $\mu = 8'8$; $\sigma = 3$ } $\quad P(8'8-c \leq x \leq 8'8+c) \overset{\text{TIPIFICO}}{=} P\left(\frac{8'8-c-8'8}{3} \leq z \leq \frac{8'8+c-8'8}{3}\right)$

$= P\left(\frac{-c}{3} \leq z \leq \frac{c}{3}\right)$

$P\left(\frac{-c}{3} \leq z \leq \frac{c}{3}\right) = 0'98 \Rightarrow P\left(z \leq \frac{c}{3}\right) - \left[1 - P\left(z \leq \frac{c}{3}\right)\right] = 0'98 \Rightarrow P\left(z\leq \frac{c}{3}\right) - 1 + P\left(z \leq \frac{c}{3}\right) = 0'98$

$\Rightarrow 2P\left(z \leq \frac{c}{3}\right) = 0'98 + 1 \quad P\left(z \leq \frac{c}{3}\right) = 0'99 \xrightarrow{\text{TABLA}} \frac{c}{3} = 2'33 \quad \boxed{c = 6'99}$

2021 JUNIO B. 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

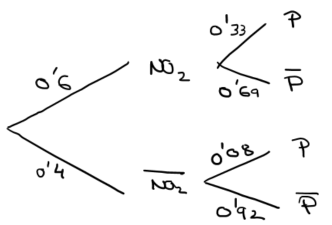
Una estación de medición de calidad del aire mide los niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0,16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0,33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0,08.

a) (0,5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

b) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

c) (0,5 puntos) ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2" y " en un día se supera el nivel permitido de partículas" ?

d) (0,75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el niv el permitido de partículas?



a) $P(NO_2 \cap P) = P(NO_2)\cdot P(P/NO_2) = 0'6 \cdot 0'33 = \boxed{0'198}$

b) $P(NO_2 \cup P) = P(NO_2) + P(\overline{NO_2})\cdot P(P/\overline{NO_2}) = 0'6 + 0'4\cdot 0'08 = \boxed{0'632}$

c) Para que sean independientes debe cumplir $P(NO_2\cap P) = P(NO_2)\cdot P(P)$

$P(NO_2\cap P) = 0'198$

$P(NO_2) = 0'6$

$P(P) = 0'6\cdot 0'33 + 0'4\cdot 0'08 = 0'23$

$0'198 = 0'6\cdot 0'23$

$0'198 \neq 0'138$

$\boxed{\text{NO SON INDEPENDIENTES}}$

d) $P(NO_2/\overline{P}) = \dfrac{P(NO_2\cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \dfrac{0'6\cdot 0'69}{0'6\cdot 0'69 + 0'4\cdot 0'92} = \boxed{0'5294}$

2021 MODELO A. 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos).

En un instituto uno de cada cuatro alumnos practica baloncesto. Se eligen 6 alumnos al azar y se considera la variable aleatoria X que representa el número de estudiantes entre estos 6 que practican baloncesto. Se pide:

a) (1 punto) Identificar la distribución de la variable aleatoria X y calcular $P(X=0)$.

b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 5 de los 6 elegidos practiquen baloncesto.

c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 1 de los 6 practique baloncesto.

a) BINOMIAL $P_B = \frac{1}{4} = 0'25$ $n = 6$ $\boxed{B(6, 0'25)}$ $q = 1-p = 0'75$

$P(x=0) = \binom{10}{0}\cdot 0'25^0 \cdot 0'75^{10-0} = \boxed{0'0563}$

b) $P(x\geq 5) = P(x=5) + P(x=6) = 0'0584 + 0'01622 = \boxed{0'0746}$

$P(x=5) = \binom{10}{5}\cdot 0'25^5\cdot 0'75^{10-5} = 0'0584$

$P(x=6) = \binom{10}{6}\cdot 0'25^6\cdot 0'75^{10-6} = 0'01622$

c) $P(x\geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - 0'0563 = \boxed{0'9437}$

2021 MODELO B. 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos).

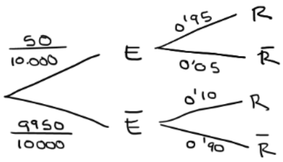
Una médico experta diagnostica posibles enfermos de una dolencia, fallando en reconocerla en el 5% de los casos que la padecen y diagnosticándola equivocadamente en el 10% de los sanos. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad es padecida por 50 de cada diez mil personas. Si una persona al azar se somete a reconocimiento, calcule la probabilidad de:

a) (0,5 puntos) Que sea diagnosticada como enferma.

b) (1 punto) Que esté enferma si la diagnostican como tal.

c) (0,5 puntos) Que no esté enferma si la diagnostican sana.

d) (0,5 puntos) Que sea mal diagnosticada.



a) $P(E) = P(E)\cdot P(R/E) + P(\overline{E})\cdot P(R/\overline{E}) = \frac{50}{10000}\cdot 0'95 + \frac{9950}{10000}\cdot 0'1$

$= \boxed{0'1043}$

b) $P(E\cap R) = P(E)\cdot P(R/E) = \frac{50}{10.000}\cdot 0'95 = \boxed{0'0048}$

c) $P(\overline{E}\cap R) = \frac{9950}{10000}\cdot 0'1 = \boxed{0'0995}$

d) P(mal diagnosticada) $= P(E)\cdot P(\overline{R}/E) + P(\overline{E})\cdot P(R/\overline{E}) = \frac{50}{10000}\cdot 0'05 + \frac{9950}{10000}\cdot 0'1 = \boxed{0'09975}$

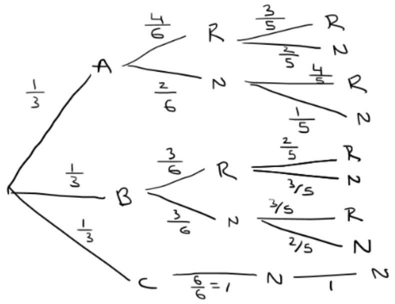
2020 SEPTIEMBRE A.4 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.

b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.

c) (0,5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.



a) $P(1^a R) = P(A)\cdot P(1^aR/A) + P(B)\cdot P(1^aR/B)$
$= \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6} = \boxed{\frac{7}{18}}$

b) $P(1^aR \cap 2^aN) = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} = \boxed{\frac{17}{90}}$

c) $P(2^aN/1^aR) = \dfrac{P(2^aN\cap 1^aR)}{P(1^aR)} = \dfrac{\frac{17}{90}}{\frac{7}{18}} = \boxed{\frac{17}{35}}$

2020 SEPTIEMBRE B.4 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X,Y. Sabemos que $P(X) = 0{,}4$ y que $P(X\cap\bar{Y}) = 0{,}08$ (donde $\bar{Y}$ es el suceso complementario a Y). Se pide:

a) (1 punto) Calcular $P(Y)$.

b) (0,5 puntos) Calcular $P(X\cup Y)$.

c) (1 punto) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

a) $P(X)=0'4 \quad P(X\cap\bar{Y})=0'08$ Como son sucesos independientes $P(X\cap Y)=P(X)\cdot P(Y)$

$P(X\cap\bar{Y})=P(X)-P(X\cap Y) \Rightarrow 0'08=0'4-P(X\cap Y) \quad P(X\cap Y)=0'4-0'08=0'32$

$P(X\cap Y)=P(X)\cdot P(Y) \quad 0'32=0'4\cdot P(Y) \Rightarrow \boxed{P(Y)=0'8}$

b) $P(X\cup Y)=P(X)+P(Y)-P(X\cap Y) \quad P(X\cup Y)=0'4+0'8-0'32=\boxed{0'88}$

c) BINOMIAL $n=8 \quad P_{\bar{X}}=0'6 \quad q=1-0'6=0'4$

$P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-0'000655-0'007864=\boxed{0'9915}$

$P(X=0)=\binom{8}{0}\cdot 0'6^{0}\cdot 0'4^{8-0}=0'000655$

$P(X=1)=\binom{8}{1}\cdot 0'6^{1}\cdot 0'4^{8-1}=0'007864$

2020 JULIO COINCIDENTES A.4 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

De una bolsa con 20 fichas numeradas del 1 al 20 se extraen sucesivamente 2 fichas sin reemplazamiento. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que ambos números sean múltiplos de 3.
b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que el primer número sea múltiplo de 6 y el segundo sea múltiplo de 3.
c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que ninguno de los dos números sea múltiplo de 2.
d) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea un número impar, sabiendo que la primera también lo ha sido.

a) $\dot{3} = 3,6,9,12,15,18 \qquad P(\text{ambos } \dot{3}) = \frac{6}{20}\cdot\frac{5}{19}=\boxed{\frac{3}{38}}$

b) $P(1^{o}\,\dot{6}\cap 2^{o}\,\dot{3})=\frac{3}{20}\cdot\frac{5}{19}=\boxed{\frac{3}{76}}$

c) $P(\text{ninguno } \dot{2})=\frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}=\boxed{\frac{9}{38}}$

d) $P(2^{a}\text{impar}/1^{a}\text{impar})=\frac{P(2^{a}\text{impar}\cap 1^{a}\text{impar})}{P(1^{a}\text{impar})}=\frac{\frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}}{\frac{10}{20}}=\boxed{\frac{9}{19}}$

2020 JULIO COINCIDENTES B.4 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

El peso de las crías recién nacidas de una especio de primates sigue una distribución normal X de media $\mu = 3353$gramos. Sabiendo que $P(X > 3693) = 0{,}2$, se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular la desviación típica, σ, de la distribución de pesos.
b) (1 punto) Calcular el valor de x_0 tal que $P(X < x_0) = 0,2$.

a) $P(X>3693)=0'2 \Rightarrow P\left(Z>\frac{3693-3353}{\sigma}\right)=0'2 \Rightarrow P\left(Z>\frac{340}{\sigma}\right)=0'2 \Rightarrow 1-P\left(Z<\frac{340}{\sigma}\right)=0'2$

$\Rightarrow P\left(Z<\frac{340}{\sigma}\right)=0'8 \Rightarrow \frac{340}{\sigma}=0'845 \quad \sigma=\frac{340}{0'845}=\boxed{402'37}$

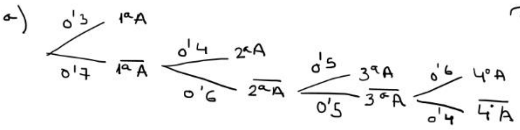
b) $P(X<x_0)=0'2 \Rightarrow P\left(Z<\frac{x_0-3353}{402'37}\right)=0'2 \Rightarrow 1-P\left(Z<-\frac{x_0-3353}{402'37}\right)=0'2 \Rightarrow -\frac{x_0-3353}{402'37}=0'845$

$-x_0+3353=0'845\cdot 402'37 \qquad x_0=\boxed{3013 \text{ gramos}}$

2020 JULIO A.4 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.
b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.
c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

a)


$P(\text{antes del } 4^{o})=P(\text{acertar } 1^{o})+P(\text{acertar } 2^{o})+P(\text{acertar } 3^{o})$
$=0'3+0'7\cdot 0'4+0'7\cdot 0'6\cdot 0'5=\boxed{0'79}$

b) $P(\text{no acertar})=0'7\cdot 0'6\cdot 0'5\cdot 0'4=\boxed{0'084}$

c) $n=10 \quad P_{\text{ACIERTO}}=0'85$ BINOMIAL $\quad q=1-p=1-0'85=0'15$

$P(X=6)=\binom{10}{6}\cdot 0'85^{6}\cdot 0'15^{10-6}=\boxed{0'0401}$

2020 JULIO B.4 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

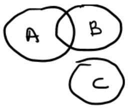
Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0{,}5, P(B) = 0{,}25$ y $P(A \cap B) = 0{,}125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) (0,5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$.
b) (0,5 puntos) ¿Son A y B independientes?
c) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).

d) (0,75 puntos) Calcular $P(\bar{B}/A)$.

a) $P(A)=0'5 \quad P(B)=0'25 \quad P(A\cap B)=0'125$ $\Rightarrow$

Si son incompatibles $\Rightarrow P(C\cap A)=0$ y $P(C\cap B)=0$



Se ve que $P(C\cap(A\cup B))=0$

$P(C\cap(A\cup B)) = P((C\cap A)\cup(C\cap B)) = P(C\cap A)+P(C\cap B)-P((C\cap A)\cap(C\cap B)) = 0$ ✓ $\boxed{\text{NO SON COMPATIBLES}}$

b) Para que sean independientes: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$0'125 = 0'5\cdot 0'25$

$0'125 = 0'125$ ✓ CUMPLE. $\boxed{\text{SON INDEPENDIENTES}}$

c) $P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B) = 0'5+0'25-0'125 = \boxed{0'625}$

d) $P(\bar{B}/A) = \dfrac{P(\bar{B}\cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{0'5-0'125}{0'5} = \boxed{0'75}$

2020 MODELO A.4 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dados dos sucesos A y B, se conocen las siguientes probabilidades: $P(A\cup B)=0{,}55$, $P(\bar{A}\cup\bar{B})=0{,}90$ y $P(B/A)=0{,}25$. Se pide:

a) (2 puntos) Calcular $P(A\cap B), P(A), P(B)$ y $P(B/\bar{A})$.

b) (0,5 puntos) Deducir de manera razonada si los sucesos A y B son independientes.

a) $P(\bar{A}\cup\bar{B}) = P(\overline{A\cap B}) = 0'90 \Rightarrow P(\overline{A\cap B}) = 1-P(A\cap B)$

$0'90 = 1-P(A\cap B) \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=0'1}$

$P(B/A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0'25 = \dfrac{0'1}{P(A)} \Rightarrow P(A) = \dfrac{0'1}{0'25} = \boxed{0'4}$

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow 0'55 = 0'4+P(B)-0'1 \Rightarrow P(B)=\boxed{0'25}$

$P(B/\bar{A}) = \dfrac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \dfrac{P(B)-P(B\cap A)}{1-P(A)} = \dfrac{0'25-0'1}{1-0'4} = \boxed{0'25}$

b) Para que sean independientes: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$0'1 = 0'4\cdot 0'25 \Rightarrow 0'1 = 0'1$ ✓ $\boxed{\text{SON INDEPENDIENTES}}$

2020 MODELO B.4 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media 30°C y varianza 25. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre 28°C y 32°C.

b) (1 punto) Calcular el número esperado de días del mes con máxima superior a 36°C.

c) (0,75 puntos) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50% de los días del mes.

a) $\mu = 30°C \quad \sigma^2=25 \Rightarrow \sigma=\sqrt{25}=5$ (desviación típica)

$P(28\le x\le 32) = P\left(\dfrac{28-30}{5}\le z\le\dfrac{32-30}{5}\right) = P(-0'4\le z\le 0'4) = P(z<0'4)-[1-P(z\le 0'4)]$

$= 0'6554-[1-0'6554] = \boxed{0'3108}$

b) $P(x>36) = P\left(z>\dfrac{36-30}{5}\right) = P(z>1'2) = 1-P(z<1'2) = 1-0'8849 = 0'1151$

Junio tiene 30 días $\Rightarrow 30\cdot 0'1151 = 3'45 \rightarrow$ $\boxed{\text{Se esperan que entre 3 y 4 días superen los 36°C.}}$

c) $P(x>T^a)=0'50$

$P\left(z>\dfrac{T^a-30}{5}\right)=0'50 \overset{\text{TABLA}}{\Rightarrow} \dfrac{T^a-30}{5}=0 \quad \boxed{T^a=30°C}$