2024 MODELO B. 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Consideramos las matrices reales: $A\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$, y $B\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar si existe algún valor de m para el cual la matriz BA tiene inversa.
b) (0,75 puntos) Estudiar el rango de la matriz AB en función del parámetro m.
c) (1 punto) Para m = 1, discutir el sistema $(A^tA)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$ según los valores de a.

a) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 1+m^2 & 1+3m \\ 0 & m^2 & 3m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$

- Para que $B \cdot A$ tenga inversa su $\det(B \cdot A) \neq 0$.
- $\begin{vmatrix} m & 1+m^2 & 1+3m \\ 0 & m^2 & 3m \\ 0 & m & 3 \end{vmatrix} = 3m^3 + 0 + 0 - 0 - 0 - 3m^3 = 0 \Rightarrow$ Siempre da 0, da igual el valor de m.
- **No existe valor de m para que la matriz tenga inversa**

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m^2+m+1 \\ 0 & m^2+3 \end{pmatrix}$

- $\begin{vmatrix} m & m^2+m+1 \\ 0 & m^2+3 \end{vmatrix} = m \cdot (m^2+3) - 0 \cdot (m^2+m+1) = m \cdot (m^2+3) \Rightarrow$ lo igualamos a cero
- $m \cdot (m^2+3) = 0 \rightarrow \boxed{m=0}$; $m^2+3=0 \Rightarrow m^2=-3 \Rightarrow m = \pm\sqrt{-3}$ ✗
- si $m \neq 0 \Rightarrow |A \cdot B| \neq 0 \Rightarrow$ **r(AB) = 2**
- si $m = 0 \Rightarrow |A \cdot B| = 0 \Rightarrow$ **r(AB) = 1**

c) $m = 1 \Rightarrow A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 4 & a \\ 1 & 4 & 10 & a^2 \end{pmatrix}}_{C} = C^*$
- $C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 20 + 4 + 4 - 2 - 10 - 16 = 0$ SIEMPRE $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$ **r(C) = 2**
- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix} = 2a^2 + 4a + a - 2a - a^2 - 4a = a^2 - a \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a \cdot (a-1) = 0 \rightarrow \boxed{a=0}$; $\boxed{a=1}$
- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 4 & a \\ 1 & 10 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 + 10a + a - 4a - a^2 - 10a = 3a^2 - 3a = 0 \Rightarrow a(3a-3) = 0 \rightarrow \boxed{a=0}$; $\boxed{a=1}$
- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 4 & a \\ 4 & 10 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 + 20a + 4a - 16a - 2a^2 - 10a = 2a^2 - 2a = a(2a-2) = 0 \rightarrow \boxed{a=0}$; $\boxed{a=1}$
- si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Rightarrow r(C^*) = 3 \longrightarrow r(C) \neq r(C^*)$ **Sistema Incompatible**
- si $a = 0$ y $a = 1 \Rightarrow r(C^*) = 2 \longrightarrow r(C) = r(C^*) \neq$ nº incognitas **Sistema Compatible Indeterminado**
  $\Rightarrow$ nº incognitas = 3

2023 JULIO A. 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las matrices reales: $A\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B\begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de A^tA.
b) (0,5 puntos) Calcular el rango de BA en función de b.
c) (0,75 puntos) Calcular B^{-1} para $b = 2$.
d) (0,75 puntos) Para $b = 1$, calcular B^5.

a) $A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2-b & 1 & 2b \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Como es una 2x3 el rango máximo es 2.

$C = \begin{vmatrix} 2b & b \\ 2-b & 1 \end{vmatrix} = 2b - b(2-b) = 2b - 2b + b^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = 0 \Rightarrow \boxed{b=0}$

• si $b \neq 0 \Rightarrow |C| \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(B \cdot A) = 2}$ • si $b = 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{r(B \cdot A) = 1}$

c) $b = 2 \Rightarrow B \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ① $|B| = 4$ ② $Adj\, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ③ $Adj\, B^t \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

④ $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot Adj\, B^t \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{4} & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}}$

d) $b = 1 \Rightarrow B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$B^4 = B^3 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $B^5 = B^4 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}$

2023 JUNIO COINCIDENTES A. 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro a.
b) (1 punto) Calcular, en el caso de que exista, la inversa de A para $a = 0$.
c) (0,5 puntos) Resolver el sistema A $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ para el caso $a = 1$.

a)

$|A| = 6a^2 + a - 6(a+1) - 3(a+1) - a^2 + 12a = 6a^2 + a - 6a - 6 - 3a - 3 - a^2 + 12a$
$= 5a^2 + 4a - 9$

• $5a^2 + 4a - 9 = 0 \Rightarrow \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-a)}}{2 \cdot 5} = \frac{-4 \pm \sqrt{196}}{10} = \frac{-4 \pm 14}{10}$ $\nearrow \frac{-4+14}{10} = 1 \quad \boxed{a = 1}$ $\searrow \frac{-4-14}{10} = \frac{-18}{10} = \frac{-9}{5} \quad \boxed{a = \frac{-9}{5}}$

• si $a \neq 1$ y $a \neq \frac{-9}{5} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A) = 3}$

• si $a = 1$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A) = 2}$

• si $a = \frac{-9}{5}$ $\begin{pmatrix} \frac{-18}{5} & 1 & 1 \\ \frac{-9}{5} & 3 & -6 \\ \frac{-4}{5} & 1 & \frac{-9}{5} \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 - 3 = -9 \neq 0$ $\boxed{r(A) = 2}$

b) $a = 0 \Rightarrow A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ① $|A| = 0 + 0 - 6 - 3 - 0 - 0 = -9 \neq 0$ tiene inversa

② $Adj\, A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -3 \\ +1 & -1 & 1 \\ -9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ③ $Adj\, A^t \begin{pmatrix} 6 & 1 & -9 \\ -6 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ④ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj\, A^t = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & -9 \\ -6 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/9 & 1 \\ 2/3 & 1/9 & 0 \\ 1/3 & -1/9 & 0 \end{pmatrix}}$

c) $a = 1$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 2F_2 - F_1 \\ F_1 = F_3 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x + y + z = 0 \\ 5y - 13z = 0 \end{matrix}$

• $\boxed{z = \lambda} \Rightarrow 5y - 13\lambda = 0 \Rightarrow 5y = 13\lambda \Rightarrow \boxed{y = \frac{13\lambda}{5}}$

• $2x + \frac{13\lambda}{5} + \lambda = 0 \Rightarrow 2x = \frac{-13\lambda}{5} - \lambda \Rightarrow 2x = \frac{-13\lambda - 5\lambda}{5} \Rightarrow x = \frac{-18\lambda}{10} \Rightarrow \boxed{x = \frac{-9\lambda}{5}}$

2023 JUNIO B. 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dado el sistema $\begin{cases}(a+1)x+4y=0\\(a-1)y+z=3\\4x+2ay+z=3\end{cases}$, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a.
b) (0,5 puntos) Resolverlo para $a=3$
c) (0,75 puntos) Resolverlo para $a=5$

a) $A^*\left(\begin{array}{cccc}a+1 & 4 & 0 & 0\\ 0 & a-1 & 1 & 3\\ 4 & 2a & 1 & 3\end{array}\right)$ (A = las tres primeras columnas)

• $|A| = (a+1)\cdot(a-1)+16-2a(a+1) = a^2-1+16-2a^2-2a = -a^2-2a+15$

$\Rightarrow \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot15}}{2\cdot(-1)} = \frac{2\pm\sqrt{64}}{-2} = \frac{2\pm8}{-2}$ → $\boxed{a=-5}$; $\boxed{a=3}$

• si $a\neq-5$ y $a\neq3 \Rightarrow |A|\neq0 \Rightarrow r(A)=3$ y $r(A^*)=3$; nº incóg. $=3$

$\boxed{r(A^*)=r(A)=\text{nº incóg.}}$ Sistema compatible Determinado

• si $a=-5$

$\left(\begin{array}{cccc}-4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 1 & 3\\ 4 & -10 & 1 & 3\end{array}\right) F_3+F_1 \left(\begin{array}{cccc}-4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 1 & 3\\ 0 & -6 & 1 & 3\end{array}\right) 6F_3-8F_2 \left(\begin{array}{cccc}-4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

$r(A)=2$, $r(A^*)=2$, nº incóg $=3$

$\boxed{r(A^*)=r(A)\neq\text{nº incógnitas}}$ Sistema Compatible Indeterminado.

• si $a=3$

$\left(\begin{array}{cccc}4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 4 & 6 & 1 & 3\end{array}\right) F_3-F_1 \left(\begin{array}{cccc}4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1 & 3\end{array}\right) F_3=F_2 \left(\begin{array}{cccc}4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

$r(A)=2$, $r(A^*)=2$, nº incóg $=3$

$\boxed{r(A)=r(A^*)\neq\text{nº incógnitas}}$ Sistema Compatible Indeterminado

b) $\left(\begin{array}{cccc}4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ $\begin{cases}4x+4y=0\\2y+z=3\end{cases}$

$\boxed{y=\lambda}$ • $2\lambda+z=3 \Rightarrow \boxed{z=3-2\lambda}$

• $4x+4\lambda=0 \Rightarrow 4x=-4\lambda \Rightarrow \boxed{x=-\lambda}$

c) $\left(\begin{array}{cccc}6 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 3\\ 4 & 10 & 1 & 3\end{array}\right) 4F_1-6F_3 \left(\begin{array}{cccc}6 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 3\\ 0 & -44 & -6 & -18\end{array}\right) F_3:2 \left(\begin{array}{cccc}6 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 3\\ 0 & -22 & -3 & -9\end{array}\right) 22F_2+4F_3 \left(\begin{array}{cccc}6 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 10 & 30\end{array}\right)$

$\begin{cases}6x+4y=0\\4y+z=3\\10z=30\end{cases}$ → $\boxed{z=3}$

• $4y+3=3 \Rightarrow 4y=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$

• $6x+4\cdot0=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

2023 MODELO B. 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las matrices reales: $A\begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se verifica que $A^tB = C$.
b) (1 punto) Calcular, si existen, los valores de m para los que existe la inversa de AC y calcular para m=0 la inversa de AC.
c) (0,75 puntos) Calcular, si existe, el valor de m para el cual se cumple que $B^2 = B - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

a) $A^t \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} m & -2 \\ -1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2m^2-2 & -m \\ -2m & 1 \\ 3m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ • $2m^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm\sqrt{1}$ → $m=1$ ✓, $m=-1$ ✗

• $-m = -1 \Rightarrow m = 1$

• $-2m = -2 \Rightarrow m = 1$

• $3m = 3 \Rightarrow m = 1$

Para que se verifique $A^t \cdot B = C$, $m = 1$.

b) $A \cdot C = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -m-2 \\ 3m & 2-m \end{pmatrix}$

• Para que exista $(A \cdot C)^{-1}$ el determinante $|A \cdot C| \neq 0$.

• $|A \cdot C| = 5 \cdot (2-m) - 3m \cdot (-m-2) = 10 - 5m + 3m^2 + 6m = 3m^2 + m + 10$

• $3m^2 + m + 10 = 0 \Rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10}}{2 \cdot 3} = \nexists$ • No hay valor de m que anule $|A \cdot C|$.

• La matriz A·C tiene inversa para cualquier valor de m.

c) $B^2 = B - I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4m^2-1 & -2m \\ 2m & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m-1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

• $4m^2 - 1 = 2m - 1 \Rightarrow 4m^2 - 2m = 0 \Rightarrow m(4m-2) = 0$ → $m = 0$ ✗, $4m - 2 = 0 \Rightarrow 4m = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ ✓

• $-2m = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ ✓

• $2m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ ✓

Para que se cumpla $B^2 = B - I$ m debe ser $\frac{1}{2}$

2022 JULIO COINCIDENTES A. 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Para $b = a^2$, determinar los valores de a para que la matriz A tenga inversa.
b) (1 punto) Para $b = 4$ y $a = -2$, calcular $A^{-1} \cdot (B + 2A) - (A^{-1} + B^T) \cdot B$
c) (1 punto) Para $b = 1$, discutir el rango de la matriz A + B en función del parámetro a.

a) • $A\begin{pmatrix} a & a^2 & 0 \\ a^2 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $|A| = a^3 - a^5 \Rightarrow a^3 - a^5 = 0 \Rightarrow a^3(1-a^2) = 0$

$a^3 = 0 \Rightarrow a = \sqrt[3]{0} \Rightarrow \boxed{a = 0}$

$1 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \boxed{a = 1}$, $\boxed{a = -1}$

• Una matriz tiene inversa cuando $|A| \neq 0$.

• Si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1 \Rightarrow |A| \neq 0$ y tiene inversa

b) • $A\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ① $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj\,A^t$ ② $|A| = -8 + 32 = 24$

③ $Adj\,A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$ ④ $Adj\,A^t \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$ ⑤ $A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

• $A^{-1} \cdot (B + 2A) - (A^{-1} + B^t) \cdot B = A^{-1} \cdot B + 2A \cdot A^{-1} - A^{-1} \cdot B - B^t \cdot B = 2I - B^t \cdot B$ ($A \cdot A^{-1} = I$)

$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$

c) $A\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow A+B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$

- $|A+B| = (a-1)^2\cdot(a-2) - (a-2) = (a^2-2a+1)\cdot(a-2) - a + 2 = a^3 - 2a^2 - 2a^2 + 4a + a - 2 - a + 2$
  $= a^3 - 4a^2 + 4a$ · $a^3 - 4a^2 + 4a = 0 \Rightarrow a\cdot(a^2-4a+4) = 0$ ↗ $\boxed{a=0}$ ↘ $a^2-4a+4=0$
  $\Rightarrow \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$ $\boxed{a=2}$

- si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Rightarrow |A+B| \neq 0$ y $\boxed{r(A+B) = 3}$
- si $a = 0$ $A+B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} F_1 + F_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\boxed{r(A+B) = 2}$
- si $a = 2$ $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_1 - F_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{r(A+B) = 1}$

2022 JULIO B. 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Se consideran las matrices reales

$A\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcular para qué valores del parámetro K tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de AB para $k = 1$

b) (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro K.

c) (0,5 puntos) En el caso $k = 1$, escriba el sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA.

a) $A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A\cdot B| = k(k-1) - 2k = k^2 - k - 2k = k^2 - 3k$

$\Rightarrow k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k\cdot(k-3) = 0$ ↗ $\boxed{k=0}$ ↘ y $\boxed{k=3}$

- si $k=0$ o $k=3 \Rightarrow |A\cdot B| = 0$ y no tendrá inversa
- $\boxed{\text{si } k \neq 0 \text{ y } k \neq 3 \Rightarrow |A\cdot B| \neq 0 \text{ y tendrá inversa}}$

b) $B\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |B\cdot A| = -2k(1+k) - (1-k)(k-1) + 2(k-1) + (k+1)^2$

$= -2k - 2k^2 - (k-1-k^2+k) + 2k - 2 + k^2 + 2k + 1$

$= -2k - 2k^2 - k + 1 + k^2 - k + 2k - 2 + k^2 + 2k + 1 = \boxed{0}$

- Como $|B\cdot A| = 0$, para cualquier valor de K, el $r(B\cdot A)$ no puede ser 3.
- Cogemos el menor 2x2.

$\begin{vmatrix} 1+k & 0 \\ 1-k & -2 \end{vmatrix} = -2(1+k) = -2-2k \Rightarrow -2-2k = 0 \Rightarrow 2k = -2 \Rightarrow \boxed{k=-1}$

- si $k \neq -1 \Rightarrow \boxed{r(B\cdot A) = 2}$
- si $k = -1 \Rightarrow \boxed{r(B\cdot A) = 1}$

c) $B\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Buscamos un sistema sin solución

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ Puedes poner otro número distinto al 4.

2022 JUNIO COINCIDENTES A. 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ mx + (m+1)y - z = m - 1 \\ -x - 2y + (2m-1)z = 1 - m \end{cases}$$

$$A^* \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ m & m+1 & -1 & m-1 \\ -1 & -2 & 2m-1 & 1-m \end{pmatrix}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para el valor de $m = 1$

a) $A \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ m & m+1 & -1 \\ -1 & -2 & 2m-1 \end{pmatrix}$ $|A| = (2m+2)\cdot(2m-1) + 2m + 1 - (m+1) - m(2m-1) - 4$

$= 4m^2 - 2m + 4m - 2 + 2m + 1 - m - 1 - 2m^2 + m - 4 = 2m^2 + 4m - 6$

$2m^2 + 4m - 6 = 0 \Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0$ $\quad \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2}$ $\quad m = -3$, $m = 1$

- si $m \neq 1$ y $m \neq -3 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A^*) = 3$; nº incógnitas $= 3$

$r(A) = r(A^*) =$ nº incógnitas $\Rightarrow$ sistema Compatible Determinado

- si $m = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 + F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} F_3 + F_2 \begin{pmatrix} \overbrace{2 & 1 & -1}^{A} & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$ $\quad r(A) = r(A^*) \neq$ nº incóg.

$r(A^*) = 2$ $\quad$ Sistema Compatible Indeterminado

nº incóg $= 3$

- si $m = -3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3F_1 + 2F_2 \\ 2F_3 + F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & -3 & -15 & 8 \end{pmatrix} 3F_2 - F_3 \begin{pmatrix} \overbrace{2 & 1 & -1}^{A} & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 2$ $\quad r(A) \neq r(A^*)$

$r(A^*) = 3$ $\quad$ SISTEMA INCOMPATIBLE

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad 2x + y - z = 0$, $3y - z = 0$ $\quad y = \lambda$, $z = 3\lambda \Rightarrow 2x + \lambda - 3\lambda = 0$, $2x = 2\lambda$, $x = \lambda$

Sol: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

2022 JUNIO COINCIDENTES B. 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sean las matrices $A\begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}$ y $C\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular el valor de a para que el sistema de ecuaciones $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea compatible.

b) (1,5 puntos) Calcular los valores de a, b y c para que la multiplicación de dos de las matrices sea igual a la restante.

a) $C\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (a+2)x + y \\ 3x + 2y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} (a+2)x + y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \rightarrow x = 1 - y \Rightarrow 3(1-y) + 2y = 1$ $\quad 3 - 3y + 2y = 1$ $\quad -y = -2$ $\quad y = 2$

$x = 1 - 2$ $\quad x = -1$

$(a+2)x + y = 1$

$(a+2)\cdot(-1) + 2 = 1 \Rightarrow -a - 2 + 2 = 1 \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1$

b) $A_{2\times 2}$ $\quad B_{2\times 3}$ $\quad C_{3\times 2}$ Para que dos matrices puedan multiplicarse el nº de columnas de la primera debe ser el número de filas de la segunda.

$A_{2\times 2}\cdot B_{2\times 3} = C_{2\times 3}$ FALSO (2 = sí)

$B_{2\times 3}\cdot C_{3\times 2} = A_{2\times 2}$ CUMPLE. (3 = sí)

Hacemos entonces $B\cdot C = A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a+c & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+11 & 8 \\ 5a+3c+8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 8 \\ 1 & b+c \end{pmatrix}$$

$a+c$ $\quad$ L $\quad$ L $\quad$ $a+2c+6$

$2a+4+3a+3c+4$
$2+2a+2c+4$

$\begin{cases} a+11=c \\ 5a+3c+8=1 \\ 2a+2c+6=b+c \end{cases}$

$c=a+11$
$5a+3(a+11)+8=1 \Rightarrow 5a+3a+33=-7 \Rightarrow 8a=-40$
$c=-5+11 \Rightarrow \boxed{c=6}$ $\quad$ $\boxed{a=-5}$

$2\cdot(-5)+2\cdot 6+6=b+6$
$-10+18-6=b$ $\quad$ $\boxed{b=2}$

2022 JUNIO A. 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\begin{cases} x-2my+z=1 \\ mx+2y-z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$$

$A\begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A^*\begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para el valor de $m=\frac{1}{2}$

a) $|A| = 2-m+2m-2+2m^2-1 = 2m^2+m-1$ $\quad$ $2m^2+m-1=0$ $\quad$ $\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot2\cdot(-1)}}{2\cdot2}$ $\quad$ $m=\frac{1}{2}$, $m=-1$

- si $m\neq\frac{1}{4}$ y $m\neq-1 \Rightarrow |A|\neq0$ y $r(A)=3 \Rightarrow r(A^*)=3$; nº incógnitas $=3$
  $r(A)=r(A^*)=$ nº incógnitas $\quad$ Sistema Compatible Determinado

- si $m=-1$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_2+F_1}{\underset{F_3-F_1}{\rightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{3F_2+4F_3}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (A)

$r(A)=2$, $r(A^*)=2$, nº incóg $=3$ $\quad$ $r(A)=r(A^*)\neq$ nº incóg $\quad$ Sistema Compatible Indeterminado

- si $m=\frac{1}{2}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_2\times2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_2-F_1}{\underset{F_3-F_1}{\rightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r(A)=2$, $r(A^*)=2$, nº incóg $=3$ $\quad$ $r(A)=r(A^*)\neq$ nº incóg $\quad$ Sistema Compatible Indeterminado

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{matrix} x-y+z=1 \\ 5y-3z=-3 \end{matrix}$ $\quad$ $z=\lambda$ $\quad$ $5y-3\lambda=-3$ $\quad$ $y=\frac{3\lambda-3}{5}$

$x-\frac{3\lambda-3}{5}+\lambda=1$
$5x-3\lambda+3+5\lambda=5 \Rightarrow 5x=2-2\lambda$
$x=\frac{2-2\lambda}{5}$

2022 MODELO B.1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sean las matrices $A\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa.
b) (1 punto) Para a = 1, calcular la inversa de la matriz A.
c) (1 punto) Para a = 2, resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=B$

a) $|A| = a+a^2$ $\quad$ $a^2+a=0$ $\quad$ $a(a+1)=0$ $\quad$ $a=0$ $\quad$ $a+1=0$ $\quad$ $a=-1$

La matriz no tiene inversa cuando $a=0$ o $a=-1$

b) si $a=1$

$A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj A^t$ $\quad$ $|A|=1^2+1=2$

$AdjA=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $AdjA^t\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) Si $a=2$

0 2 −1 $\quad$ 0

$\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&0&2&-1\\2&1&0&-2\end{pmatrix}\overset{F_1\leftrightarrow F_2}{2F_2-F_3}\begin{pmatrix}1&0&1&2&3\\0&-1&4&0\end{pmatrix}\overset{F_2+F_3}{}\begin{pmatrix}1&0&1&2&-1\\0&1&2&3\\0&0&6&3\end{pmatrix}$

$x+2z=-1 \rightarrow x+2\cdot\frac{1}{2}=-1 \quad \boxed{x=-2}$

$y+2z=3 \rightarrow y+2\cdot\frac{1}{2}=3 \quad \boxed{y=2}$

$6z=3 \rightarrow \boxed{z=\frac{1}{2}}$

2021 JULIO B. 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

a) (0,75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y, que tenga como soluciones $\{x=1, y=2\}$ y $\{x=0, y=0\}$

b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables *x*, *y* y *z* cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda-2 \\ z=\lambda-1 \end{cases}$$

c) (0,75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, que solo tenga como solución a $x=1$ e $y=2$.

a) TIENE QUE SER UN SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO
LA SOLUCIÓN $\{x=0; y=0\}$ INDICA QUE EL SISTEMA ES HOMOGÉNEO:

$\left.\begin{matrix}2x-y=0\\4x-2y=0\end{matrix}\right\}$

b) $\left.\begin{matrix}x=\lambda\\y=\lambda-2\\z=\lambda-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}y=x-2\\z=x-1\end{matrix}\right\}\rightarrow\left.\begin{matrix}x-y-2=0\\x-z-1=0\end{matrix}\right\}$

c) ES UN SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO $x=1$; $y=2$

$\left.\begin{matrix}2x-y=0\\x+2y=5\\2x+4y=10\end{matrix}\right\}$

2021 JUNIO COINCIDENTES A. 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las siguientes matrices:

$A\begin{pmatrix}0&1&1\\m&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\quad B\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

a) (1,25 puntos) Determine los valores del parámetro real m para los que la matriz A es invertible y calcule su inversa en esos casos.

b) (0,75 puntos) Estudie el sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=B$ en función del parámetro m.

c) (0,5 puntos) Resuelva el sistema del apartado anterior para el valor m=2.

a) $|A|=-1-m \qquad -1-m=0 \qquad m=-1$

SERÁ INVERTIBLE CUANDO $m\neq-1$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj\,A^t$

$Adj\,A\begin{pmatrix}1&-m&1\\-1&-1&1\\-1&m&-m\end{pmatrix}\quad Adj\,A^t\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-m&-1&m\\-1&1&-m\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{-1-m}&\frac{-1}{-1-m}&\frac{-1}{-1-m}\\\frac{-m}{-1-m}&\frac{-1}{-1-m}&\frac{m}{-1-m}\\\frac{-1}{-1-m}&\frac{1}{-1-m}&\frac{-m}{-1-m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{1+m}&\frac{1}{1+m}&\frac{1}{1+m}\\\frac{m}{1+m}&\frac{1}{1+m}&\frac{-m}{1+m}\\\frac{1}{1+m}&\frac{-1}{1+m}&\frac{m}{1+m}\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}0&1&1\\m&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

- Si $m\neq-1 \Rightarrow |A|\neq0 \Rightarrow r(A)=3$, $r(A^*)=3$, nº incógnitas $=3$ → Sistema Compatible Determinado

- Si $m=-1$

$\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\overset{F_1\leftrightarrow F_2}{F_3+F_2}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{F_2-F_3}{}\underbrace{\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A}\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}$

$r(A)=2$, $r(A^*)=3$, $r(A)\neq r(A^*)$

Sistema Incompatible

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2F_3 - F_2]{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} x+z=0 \\ y+z=0 \\ 3z=-1 \end{matrix}\right\}$

$z = -\frac{1}{3}$ $\quad y - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$ $\quad x - \frac{1}{3} = 0 \quad x = \frac{1}{3}$

2021 JUNIO B. 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax - 2y + (a-1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de a.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para el valor de $a = 1$.

a) $A \begin{pmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad A^* \begin{pmatrix} a & -2 & a-1 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -a & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

$|A| = -18a - 2(a-1) - 12a + 3a(a-1) + 24 + 6a = -24a - 2a + 2 + 3a^2 - 3a + 24 = 3a^2 - 29a + 26$

$3a^2 - 29a + 26 = 0$

$\frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 26}}{6} = \frac{29 \pm 23}{6} \begin{cases} a = \frac{26}{3} \\ a = 1 \end{cases}$

- si $a \neq \frac{26}{3}$ y $a \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A^*) = 3$; nº incógnitas $= 3$ → SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

- si $a = \frac{26}{3}$

$\begin{pmatrix} \frac{26}{3} & -2 & \frac{23}{3} & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -\frac{26}{3} & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \\ \times 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 26 & -6 & 23 & 12 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -26 & 3 & -18 & 18 \end{pmatrix} \begin{matrix} 13F_2 + F_1 \\ \\ F_3 + F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 26 & -6 & 23 & 12 \\ 0 & 33 & -55 & 14 \\ 0 & -3 & 5 & 30 \end{pmatrix} 11F_3 - F_2$

$\begin{pmatrix} 26 & -2 & 23 & 12 \\ 0 & 33 & -55 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 316 \end{pmatrix}$ $\quad r(A) = 2$ $\quad r(A^*) = 3$ → $r(A) \neq r(A^*)$ Sistema Incompatible

- si $a = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ 1 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2F_1 + F_2 \\ \\ F_1 + F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \end{pmatrix} 3F_2 - F_3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\left.\begin{matrix} x - 2y = 4 \\ -y - 6z = 10 \end{matrix}\right\}$

$z = \lambda$ $\quad -y - 6\lambda = 10$ $\quad y = -6\lambda - 10$ $\quad x - 2(-6\lambda - 10) = 4 \Rightarrow x + 12\lambda + 20 = 4 \Rightarrow x = -12\lambda - 16$

2021 MODELO A.1 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las matrices $A \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales A tiene inversa.

b) (0,75 puntos) Para x= -1, calcular la inversa de A.

c) (1,25 puntos) Para x=1, calcular $(AB^t)^{2020}$.

a) $|A| = (x+1)(x-1) - 3 = x^2 - 1 - 3 = x^2 - 4$ $\quad x^2 - 4 = 0$ $\quad x^2 = 4$ $\quad x = \pm\sqrt{4}$ $\begin{matrix} x = 2 \\ x = -2 \end{matrix}$

TIENE INVERSA CUANDO $x \neq 2$ y $x \neq -2$

b) $A \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = -3$

$Adj A \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad Adj A^t \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj A^t = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

c) $A\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\2&0&3\end{pmatrix}$ $B^t\begin{pmatrix}0&0&1\\1/3&1&2/3\\-1/3&0&-2/3\end{pmatrix}$

$$A\cdot B^t=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\2&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\1/3&1&2/3\\-1/3&0&-2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$(AB^t)^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$(AB^t)^3=(AB^t)^2\cdot(AB^t)=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-I$$

$(AB^t)^4=(AB^t)^3\cdot(AB^t)=-I\cdot AB^t=-AB^t$

$(AB^t)^5=(AB^t)^4\cdot(AB^t)=-AB^t\cdot AB^t=-(AB^t)^2$

$(AB^t)^6=(AB^t)^5\cdot(AB^t)=-(AB^t)^2\cdot AB^t=-(AB^t)^3=I$ //

2020 | 6
22 | 336
40
4

$(AB^t)^{2020}=[(AB^t)^6]^{336}\cdot(AB^t)^4=I^{336}\cdot(AB^t)^4=(AB^t)^4=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$

2020 SEPTIEMBRE A.1 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea A una matriz de tamaño 3x4 tal que sus dos primeras filas son (1, 1, 1, 1) y (1, 2, 3, 4) y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, justificándolo apropiadamente:

a) (0,5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.

b) (0,5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.

c) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.

d) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.

e) (0,5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

a) $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\a&b&c&d\end{pmatrix}$ Por ejemplo $F_3=F_1+F_2$ $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&5\end{pmatrix}$

b) $A\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\7&-1&-5&2\end{pmatrix}$ La F_3 no puede ser proporcional ni combinación lineal de F_1 y F_2.

c) Si es Sistema Compatible Determinado, las 3 filas deben ser linealmente independientes

$A\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\7&-1&-5&2\end{pmatrix}$

d) si $A\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\a&b&c&d\end{pmatrix}$ a, b, c deben ser proporcionales a otra fila, pero d no.

$A\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&2&2&5\end{pmatrix}$

2020 SEPTIEMBRE B.1 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sean las matrices $A\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}, I\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

b) (0,5 puntos) Calcular la matriz $C=A^2-2I$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D=ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B)

a) $|A|=1-2+2=1$

$1\quad -3\quad -1$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-3&-1&4\\&&2\end{pmatrix}$

$Adj A \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $Adj A^t \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj A^t$ $-1\ -1$

b) $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \boxed{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$

c) $|D| = |A \cdot B \cdot B^t| =$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $A \cdot B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$|D| = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 52 + 12 - 40 - 24 = \boxed{0}$

2020 JULIO COINCIDENTE A.1 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (k+1)x + 3y + kz = 1 \\ 3x + (k+1)y + 2z = k - 1 \\ kx + 2y + kz = 2 \end{cases}$$ se pide:

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de k.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para el valor de $k = -3$.

a) $A \begin{pmatrix} k+1 & 3 & k \\ 3 & k+1 & 2 \\ k & 2 & k \end{pmatrix}$ $A^* \begin{pmatrix} k+1 & 3 & k & 1 \\ 3 & k+1 & 2 & k-1 \\ k & 2 & k & 2 \end{pmatrix}$

$|A| = k(k+1)^2 + 6k + 6k - k^2(k+1) - 9k - 4(k+1)$
$= k(k^2+2k+1) + 12k - k^3 - k^2 - 9k - 4k - 4$
$= k^3 + 2k^2 + k - k - k^3 - k^2 - 4$
$= k^2 - 4 \qquad k^2 - 4 = 0 \rightarrow k = 2,\ k = -2$

- si $k \neq 2$ y $k \neq -2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3 \Rightarrow r(A^*) = 3$; nº incógnitas $= 3$

$r(A) = r(A^*) =$ nº incógnitas — **Sistema Compatible Determinado**

- si $k = 2$

$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ 3F_3 - 2F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} F_2 \leftrightarrow F_3 \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $r(A) = 2$, $r(A^*) = 3$

$r(A) \neq r(A^*)$ — **SISTEMA INCOMPATIBLE**

- si $k = -2$

$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3F_1 + F_2 \\ 2F_1 - F_2 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} 2F_3 - F_2 \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A) = 2$, $r(A^*) = 2$, nº incóg $= 3$

$r(A) = r(A^*) \neq$ incóg — **SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO**

b) si $K = -3$

$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3F_1 + 2F_2 \\ F_2 + F_3 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2x + 3y - 3z = 1 \\ 5y - 5z = -5 \\ -z = -2 \end{matrix}$ $\boxed{z = 2}$

$\Rightarrow 5y - 5 \cdot 2 = 5 \quad 5y = 15 \quad \boxed{y = 3} \Rightarrow -2x + 3 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 1 \quad -2x + 3 = 1 \quad -2x = -2 \quad \boxed{x = -1}$

2020 JULIO COINCIDENTE B.1 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sean $B\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ y A una matriz que verifica $AB = BC$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular el determinante de A.

b) (1 punto) Calcular BCB^{-1}.

c) (1 punto) Encontrar el vector $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tal que $BC\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

a) $|AB| = |BC|$ $\quad |A|\,|B| = |B|\,|C|$

$|B| = 2 \quad |C| = 6 \Rightarrow |A|\cdot 2 = 2\cdot 6$ $\quad \boxed{|A| = 6}$

b) ① Hacemos $B^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot \text{Adj}B^t$ $\quad |B| = 0+1+1 = 2$ $\quad \text{Adj}\,B = \begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

$\text{Adj}\,B^t \begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ $\quad B^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

② $B\cdot C\cdot B^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&2&3\\1&0&3\\1&2&0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix} =$

$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&2&3\\1&0&3\\1&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&1&-1\\2&4&-2\\1&-1&3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}5/2&1/2&-1/2\\1&2&-1\\1/2&-1/2&3/2\end{pmatrix}}$

c) $BC\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0&2&3\\1&0&3\\1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c}0&2&3&1\\1&0&3&2\\1&2&0&3\end{array}\right) F_2\leftrightarrow F_1 \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&2\\0&2&3&1\\0&-2&3&-1\end{array}\right) F_2+F_3 \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&2\\0&2&3&1\\0&0&6&0\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l}x+3z=2\\2y+3z=1\\6z=0\Rightarrow \boxed{z=0}\end{array}$

$2y+3\cdot 0 = 1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}}$ $\quad x+3\cdot 0 = 2 \Rightarrow \boxed{x=2}$

2020 JULIO A.1 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\begin{cases}x+ay+z=a+1\\-ax+y-z=2a\\-y+z=a\end{cases}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de a.

b) (0,5 puntos) Resuelva el sistema para el valor de $a = 0$

a) $A\begin{pmatrix}1&a&1\\-a&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ $\quad A^*\left(\begin{array}{ccc|c}1&a&1&a+1\\-a&1&-1&2a\\0&-1&1&a\end{array}\right)$

$|A| = 1+a+0-0+a^2-1 = a^2+a$

$a^2+a=0 \Rightarrow a(a+1)=0 \Rightarrow a=0,\ a=-1$

- si $a\neq 0$ y $a\neq -1 \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow r(A)=3 \Rightarrow r(A^*)=3$; nº incógnitas $=3$

$r(A)=r(A^*)=$ nº incógnitas $\quad$ SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

- si $a=0$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right) F_2+F_3 \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$ $\quad r(A)=2,\ r(A^*)=2,$ nº incógnitas $=3$

$r(A)=r(A^*)\neq$ nº incógnitas $\quad$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

- si $a=-1$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\1&1&-1&-2\\0&-1&1&-1\end{array}\right) F_2-F_1 \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&2&-2&-2\\0&-1&1&-1\end{array}\right) 2F_3+F_2 \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&2&-2&-2\\0&0&0&-4\end{array}\right)$

$r(A)=2,\ r(A^*)=3$ $\quad r(A)\neq r(A^*)$ $\quad$ SISTEMA INCOMPATIBLE

b) si $a=0$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$ $\begin{array}{l}x+z=0\\y-z=0\\z=\lambda\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}x=-\lambda\\y=\lambda\end{array}$

MODELO 2020 B.1 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el rango de la matriz A en función del parámetro t.

b) (1,5 puntos) Resolver el sistema $AX = B$, para los valores de t que los hagan compatible y determinado.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \end{vmatrix} = 10+3t-10-5t = -2t \quad -2t=0 \Rightarrow t=0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2+t \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2+2+t \Rightarrow t=0$

$\begin{vmatrix} 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -10+10+3t = 3t \Rightarrow t=0$

- si $t=0 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow r(A)=1$
- si $t \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow r(A)=2$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* \begin{pmatrix} 1 & 2+t & 3 \\ 5 & 10+3t & 9 \\ -1 & -2 & 3t+3 \end{pmatrix}$

- Para que sea compatible determinado: $r(A) = r(A^*) = n^{\text{o}}$ incóg $= 2$.
- Mirando el apartado anterior, será $r(A)=2$ cuando $t \neq 0$.

- Hacemos $|A^*| = (10+3t)\cdot(3t+3) - 30 - 9(2+t) + 3(10+3t) - 5(2+t)\cdot(3t+3) + 18$

$= 30t + 30 + 9t^2 + 9t - 30 - 18 - 9t + 30 + 9t - 5(6t+6+3t^2+3t) + 18$

$= 39t + 9t^2 + 30 - 30t - 30 - 15t^2 - 15t = -6t^2 - 6$

- $-6t^2 - 6t = 0 \Rightarrow t\cdot(-6t-6) = 0$ $\begin{cases} t=0 \text{ NO VALE} \\ -6t = 6 \Rightarrow t = -1. \end{cases}$

- Si $t \neq -1 \Rightarrow r(A^*) = 3$ y quedaría $r(A) = 2 \neq r(A^*)$
- si $t = -1 \Rightarrow r(A^*) = 2$ y quedaría $r(A) = r(A^*) = n^{\text{o}}$ incóg $= 2$

Será sistema compatible determinado cuando $t = -1$.