

2024 MODELO A. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea la función $f(x) = x^3 \sqrt{(x^2 - 1)^2}$

a) (0,75 puntos) Halle $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^{2/3}}$

b) (1,75 puntos) Halle el área, en el primer cuadrante, comprendida entre la recta $y = x$ y la gráfica de la función $f(x)$.

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{(x-1)^{2/3}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{(1^2-1)^2}}{(1-1)^{2/3}} = \frac{0}{0} \text{ IND}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2 \cdot (x-1)^2}}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot (x+1)^{2/3} \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot (x+1)^{2/3} = 1 \cdot (1+1)^{2/3} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$$

b) ① Hacemos puntos de corte entre las dos funciones $\begin{cases} y = x \\ y = x \cdot \sqrt[3]{(x^2-1)^2} \end{cases}$

$$x = x \cdot \sqrt[3]{(x^2-1)^2} \Rightarrow x - x \cdot \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x \cdot (1 - \sqrt[3]{(x^2-1)^2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} \Rightarrow 1^3 = (x^2-1)^2 \Rightarrow 1 = (x^2-1)^2 \Rightarrow \sqrt{1} = x^2-1 \Rightarrow 1 = x^2-1 \Rightarrow 1+1 = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \text{No nos vale}$$

② Como el área debe estar en el primer cuadrante, solo nos quedamos con las x positivas $\left(\begin{matrix} y \\ x \end{matrix} \right)$
 $x = 0$; $x = \sqrt{2}$

$$③ A = \int_0^{\sqrt{2}} (x \cdot \sqrt[3]{(x^2-1)^2} - x) dx = \int_0^{\sqrt{2}} x \cdot (x^2-1)^{2/3} dx - \int_0^{\sqrt{2}} x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} 2x (x^2-1)^{2/3} dx - \int_0^{\sqrt{2}} x dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(x^2-1)^{5/3}}{\frac{5}{3}} \right]_0^{\sqrt{2}} - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(\sqrt{2}^2-1)^{5/3}}{\frac{5}{3}} - \frac{(0^2-1)^{5/3}}{\frac{5}{3}} \right] - \left[\frac{\sqrt{2}^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{\frac{5}{3}} - \frac{-1}{\frac{5}{3}} \right] - [1-0] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5} \right) - 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} - 1 = \frac{6}{10} - 1 = \frac{-4}{10} = -\frac{2}{5}$$

• El área es el valor absoluto: $A = \left| -\frac{2}{5} \right| = \frac{2}{5} u^2$

2024 MODELO B. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea la función real de variable real $f(x) = x - \frac{4}{(x-1)^2}$ se pide:

a) (0,75 puntos) Hallar el dominio de definición de $f(x)$ y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de las asíntotas de su gráfica.

b) (1 punto) Determinar los extremos relativos de la función, así como sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0,75 puntos) Calcular la ecuación de una recta tangente a la gráfica $f(x)$ que sea paralela a la recta de ecuación $9x - 8y = 6$.

a) $f(x) = x - \frac{4}{(x-1)^2}$ • Cogemos el denominador: $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1 = \sqrt{0} \Rightarrow x=1 \in$ Aquí no hay función
• $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

① Asíntota vertical. Hay posible A.v en $x=1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} x - \frac{4}{(x-1)^2} = 1 - \frac{4}{0} \text{ IND. Hay A.v en } x=1 \bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} x - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{-}{+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} x - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{-}{+} = -\infty \end{cases}$$

② A.H. vamos a hacer el denominador común:

$$f(x) = x - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{x(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{x(x^2 - 2x + 1) - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 4}{x^2 - 2x + 1}$$

No hay A.H porque $\text{GN} > \text{GD}$.

③ A.Oblicua $y = mx + n$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x - 4 \\ -x^3 + 2x^2 - x \\ \hline -4 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - 2x + 1 \\ x \\ \hline \end{array} \Rightarrow \text{Hay A.O en } y = x$$

b) • $f'(x) = 1 - \frac{0 \cdot (x-1)^2 - 4 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = 1 - \frac{-8(x-1)}{(x-1)^4} = 1 + \frac{8}{(x-1)^3}$

• $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8}{(x-1)^3} = -1 \Rightarrow 8 = -1 \cdot (x-1)^3 \Rightarrow (x-1)^3 = -8 \Rightarrow x-1 = \sqrt[3]{-8} \Rightarrow x-1 = -2$

$\Rightarrow \boxed{x = -1}$ Posible máx o mín.

• $f'(-2) > 0$ $f'(0) < 0$ $f'(2) > 0$
No

• $f(-1) = -1 - \frac{4}{(-1-1)^2} = -1 - \frac{4}{4} = -2$

$\Rightarrow$ Hay un máximo en $P(-1, -2)$

• Monotonía $\begin{cases} \text{crece } (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \text{decrece } (-1, 1) \end{cases}$

c) ① Dos rectas paralelas tiene la misma pendiente.

$9x - 8y = 6 \Rightarrow 8y = 9x - 6 \Rightarrow y = \frac{9x - 6}{8} \Rightarrow \boxed{m = \frac{9}{8}}$

② $m = f'(x) \Rightarrow 1 + \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{9}{8} - 1 \Rightarrow \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{1}{8} \Rightarrow 8 \cdot 8 = (x-1)^3$
 $\Rightarrow 64 = (x-1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{64} = x-1 \Rightarrow 4 = x-1 \Rightarrow x = 5$

③ Sacamos el punto de tangencia: $f(x) = x - \frac{4}{(x-1)^2}$
 $x = 5 \Rightarrow f(5) = 5 - \frac{4}{(5-1)^2} = 5 - \frac{4}{16} = 5 - \frac{1}{4} = \frac{19}{4} \Rightarrow \boxed{P_T(5, \frac{19}{4})}$

④ ECUACIÓN: $y = m(x-a) + b \Rightarrow \boxed{y = \frac{9}{8} \cdot (x-5) + \frac{19}{4}}$

2023 JULIO B. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las funciones

$f(x) = 2 + 2x - 2x^2$ y $g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$

b) (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.

a) $h(x) = |2 + 2x - 2x^2| \Rightarrow$ La pasamos a función a trozos:

$h(x) = \begin{cases} 2 + 2x - 2x^2 & \text{si } 2 + 2x - 2x^2 \geq 0 \\ -2 - 2x + 2x^2 & \text{si } 2 + 2x - 2x^2 < 0 \end{cases}$

$\rightarrow$ Resolvemos la inecuación $2 + 2x - 2x^2 \geq 0$
 $\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{-4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{-4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{-2}$
 $\rightarrow \frac{-1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ $\frac{-1 + \sqrt{5}}{-2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
 $\rightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

CONTINUIDAD

• $h(x) = \begin{cases} -2 - 2x + 2x^2 & \text{si } x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ 2 + 2x - 2x^2 & \text{si } \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ -2 - 2x + 2x^2 & \text{si } x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$h(x)$ es continua en $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ debido a que es función de valor absoluto. Además, los trozos son polinómicos, así que su dominio es $\mathbb{R}$, por tanto, continuos.

DERIVABILIDAD

• $h'(x) = \begin{cases} -2 + 4x & \text{si } x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ 2 - 4x & \text{si } \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ -2 + 4x & \text{si } x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$\rightarrow h'(x)$: Cada trozo es derivable (pues son polinómicos)

• EN $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}^-} (-2 + 4x) = -2 + 4 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = -2 + 2 - 2\sqrt{5} = -2\sqrt{5} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}^+} (2 - 4x) = 2 - 4 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 2 - 2 + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \end{array} \right\}$ No es derivable en $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

• EN $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}^-} (2 - 4x) = 2 - 4 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 2 - 2 - 2\sqrt{5} = -2\sqrt{5} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}^+} (-2 + 4x) = -2 + 4 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = -2 + 2 + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \end{array} \right\}$ No es derivable en $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

SOLUCIÓN: La función es derivable en $\mathbb{R}$ menos en $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

b) ① Ptos de corte entre las funciones:

$f(x) = 2 + 2x - 2x^2$
 $g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3$

$\left\{ \begin{array}{l} 2 + 2x - 2x^2 = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3 \Rightarrow 2x^3 + 6x^2 - 8x = 0 \quad x(2x^2 + 6x - 8) = 0 \\ \Rightarrow \boxed{x = 0} \text{ No afecta.} \\ \Rightarrow 2x^2 + 6x - 8 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \end{array} \right.$

$$\bullet \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} x=1 \rightarrow \text{Afecta porque está entre } x=0 \text{ y } x=2. \\ x=-4 \rightarrow \text{No afecta} \end{cases}$$

$$\bullet A_1 = \int_0^1 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^1 (2x^3 + 6x^2 - 8x) dx = \left[\frac{2x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{2}{4} + \frac{6}{3} - \frac{8}{2} \right) = \frac{-3}{2} \quad A_1 = \left| \frac{-3}{2} \right| = \frac{3}{2}$$

$$\bullet A_2 = \int_1^2 (2x^3 + 6x^2 - 8x) dx = \left[\frac{2x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} \right]_1^2 = \left(\frac{2 \cdot 16}{4} + 2 \cdot 4^3 - 4 \cdot 2^2 \right) - \left(\frac{2}{4} + \frac{6}{3} - \frac{8}{2} \right) \\ = 120 - \left(-\frac{3}{2} \right) = \frac{243}{2} \Rightarrow A_2 = \frac{243}{2} u^2 \quad \bullet A_{TOTAL} = A_1 + A_2 = \frac{243}{2} + \frac{3}{2} = \boxed{123 u^2}$$

2023 JUNIO COINCIDENTES A. 2. (Calificación máxima: 2,5 puros)

Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 + x$, se pide:

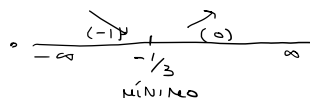
a) (1,25 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica $f(x)$ con mínima pendiente.

b) (1,25 puntos) Calcular el área de la región acotada compuesta entre la gráfica $f(x)$ y la recta $y = x$.

a) $\bullet f'(x) = \text{pendiente} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = m$ Así que la $m = 3x^2 + 2x + 1$

$\bullet$ Buscamos los mínimos de la pendiente $\Rightarrow m' = 0$ (la derivada igualada a cero)

$\bullet m' = 6x + 2 \Rightarrow 6x + 2 = 0 \Rightarrow 6x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{6} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ Posible mínimo

$\bullet$  $\bullet m'(-1) = 6(-1) + 2 < 0 \searrow$
 $\bullet m'(0) = 6(0) + 2 > 0 \nearrow$

$\bullet$ La pendiente es mínima cuando $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow m(-\frac{1}{3}) = 3 \cdot (-\frac{1}{3})^2 + 2 \cdot (-\frac{1}{3}) + 1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3} = m$

$\bullet$ Punto de tangencia cuando $x = -\frac{1}{3} \quad f(-\frac{1}{3}) = (-\frac{1}{3})^3 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{7}{27} \quad P(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{27})$

$\bullet$ Recta tangente $y = m(x-a) + b \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot (x + \frac{1}{3}) - \frac{7}{27} \Rightarrow y = \frac{2x}{3} + \frac{2}{9} - \frac{7}{27}$

$\Rightarrow y = \boxed{\frac{2x}{3} - \frac{1}{27}}$

b) $\bullet$ Ptos de corte:

$f(x) = x^3 + x^2 + x \quad y = x$
 $\left\{ \begin{array}{l} x^3 + x^2 + x = x \\ x^3 + x^2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x^2(x+1) = 0 \quad \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \\ x+1 = 0 \Rightarrow \boxed{x=-1} \end{cases}$

$\bullet A = \int_{-1}^0 (f(x) - y) dx = \int_{-1}^0 (x^3 + x^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = \left(\frac{0}{3} + \frac{0}{2} \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

$A = \left| -\frac{1}{6} \right| \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{6} u^2}$

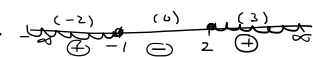
2023 JUNIO COINCIDENTES B. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1}$ se pide:

a) (1 punto) Hallar, si existen, las asíntotas de la gráfica de $f(x)$.

b) (1,5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y calcular, si existen, sus extremos relativos.

a) Convertimos valor absoluto en una función a trozos. Para ello resolvemos $x^2 - x - 2 \geq 0$

$\frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow$ 

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1} & \text{si } -1 < x < 2 \\ \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

$\bullet$ A.V. Hacemos dominio: $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$
Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$ Posible A.V. en $x = -1$.

$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{0}{0} \text{ IND } L'H \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{2x+2} = \frac{-3}{0} = -\infty$
 $\bullet \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{0}{0} \text{ IND } L'H \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-2x+1}{2x+2} = \frac{3}{0} = \infty$
 $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} = \infty \end{array} \right\} \text{ Hay A.V. en } x = -1$

$\bullet \Rightarrow$ A.H. LÍMITES AL INFINITO

$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} = 1$

$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} = 1 \Rightarrow \boxed{\text{Hay A.H. en } y=1}$

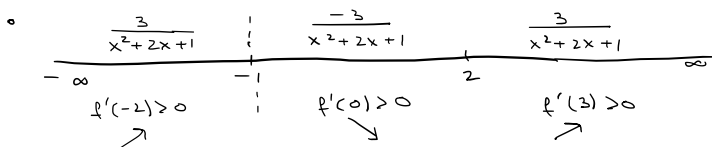
$\bullet$ No hay A.Oblícua

b) Estudiamos los posibles máximos y mínimos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-1) \cdot (x^2 + 2x + 1) - (x^2 - x - 2) \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - x^2 - 2x - 1 - (2x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 2x - 4x - 4)}{(x^2 + 2x + 1)^2} \\ &= \frac{3x^2 + 6x + 3}{(x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{3(x^2 + 2x + 1)}{(x^2 + 2x + 1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{x^2 + 2x + 1} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{x^2 + 2x + 1} = 0 \Rightarrow 3 = 0 \cdot (x^2 + 2x + 1) \Rightarrow 3 = 0 \text{ No hay máx ni mín.}$$

$$f(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^2 + 2x + 1} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-3}{x^2 + 2x + 1} = 0 \Rightarrow -3 = 0 \text{ No hay máx ni mín.}$$



Crece $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
decrece $(-1, 2)$

2023 JUNIO A. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$, se pide:

a) (0,25 puntos) Estudiar si es par o impar.

b) (0,75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.

c) (1, 5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

a) Es par si $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$
 $f(-x) = \sqrt[3]{((-x)^2 - 1)^2} = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$ } Como $f(-x) = f(x)$ tiene simetría par.

b) Primero estudiamos continuidad (haciendo su dominio)

$\Rightarrow$ raíz impar con polinomio en su interior $\Rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \Rightarrow$ continua en $\mathbb{R}$.

Ahora estudiamos derivabilidad:

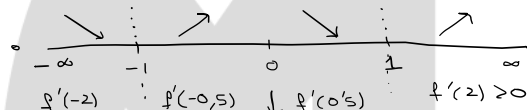
$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 1) \cdot 2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}} = \frac{4x(x^2 - 1)}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4} \sqrt[3]{x^2 - 1}} = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow \text{Haremos dominio de derivada: } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{1} \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = -1$$

$$\Rightarrow \text{Dom } f'(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \Rightarrow f(x) \text{ es derivable en } \mathbb{R} \text{ menos en } x = 1 \text{ y } x = -1.$$

Así que no es derivable en $x = 1$

c) Para sacar máximos y mínimos $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 1}} = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0$ Posible máx o mín.



$$\text{Máximo} \Rightarrow f(0) = \sqrt[3]{(0^2 - 1)^2} = 1 \Rightarrow \text{Hay un máximo en } P(0, 1).$$

• Miramos si existe algún punto mayor para ver si es absoluto.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2} = \infty \Rightarrow \text{Si hay puntos con mayor "y".}$$

$\in P(0, 1)$ ES MÁXIMO RELATIVO.

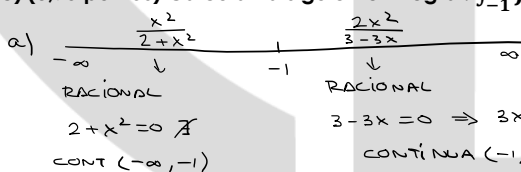
2023 JUNIO B. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2+x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{2x^2}{3-3x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{2x^2 - 1}$.

c) (0,75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^0 f(x) dx$.



$3 - 3x = 0 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \rightarrow$ Aquí no hay función
CONTINUA $(-1, 1) \cup (1, \infty)$ No es continua en $x = 1$.

• CONTINUIDAD EN $x = -1$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2}{2+(-1)^2} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2}{3-3x} = \frac{2(-1)^2}{3-3(-1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{2+x^2} = \frac{1}{3}$$

Como $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ CONTINUA EN $x = -1$.
La $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ menos en $x = 1$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)^{2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2+x^2} \right)^{2x^2-1} = 1^\infty \text{ IND.}$$

$$e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{2+x^2} - 1 \right) \cdot (2x^2-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-2-x^2}{2+x^2} \right) \cdot (2x^2-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2(2x^2-1)}{2+x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2+2}{2+x^2}}$$

$$= e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$c) \int_{-1}^0 \frac{2x^2}{3-3x} dx = \int_{-1}^0 \frac{2x^2}{3(1-x)} dx = \frac{2}{3} \int_{-1}^0 \frac{x^2}{1-x} dx \stackrel{*}{=} \frac{2}{3} \cdot \left[\int_{-1}^0 (-x-1) dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{-x+1} dx \right]$$

$$\begin{aligned} * \cdot \frac{x^2}{-x^2+x} \cdot \frac{-x+1}{-x-1} & \parallel = \frac{2}{3} \cdot \left[\int_{-1}^0 (-x-1) dx - \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1} dx \right] = \frac{2}{3} \cdot \left[-\frac{x^2}{2} - x - \ln|x-1| \right]_{-1}^0 \\ & = \frac{2}{3} \cdot \left[(-\ln|-1|) - \left(-\frac{1}{2} + 1 - \ln|1-2| \right) \right] = \frac{2}{3} \cdot (-\ln 1 + \frac{1}{2} - 1 + \ln 2) \\ & = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} + \ln 2 \right) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

2023 MODELO A. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Para la función $f(x) = \begin{cases} \frac{e(x-1)}{e^x - e} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{4x-3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar su continuidad en $\mathbb{R}$ y determinar, en el caso de que existan, las ecuaciones de sus asíntotas.

b) (0,5 puntos) Para la función $g(x) = (e^x - e)f(x)$, calcular el valor de $g'(0)$.

c) (1 punto) Calcular $\int_1^5 \sqrt{f(x)} dx$.

a) Hacemos el dominio de $f(x)$: $f(x) = \begin{cases} \frac{e(x-1)}{e^x - e} & \text{si } x < 1 \Rightarrow e^x - e = 0 \Rightarrow e^x = e \Rightarrow x = 1 \text{ No afecta.} \\ \frac{1}{4x-3} & \text{si } x \geq 1 \Rightarrow 4x-3 = 0 \Rightarrow 4x=3 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \text{ No afecta.} \end{cases}$
 $\Rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

• Continuidad en $x = 1$:

• $f(1) = \frac{1}{4 \cdot 1 - 3} = 1$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{4x-3} = 1$

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e(x-1)}{e^x - e} = \frac{e(1-1)}{e^1 - e} = \frac{0}{0} \text{ IND} \quad \text{L'H} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{0 \cdot (x-1) + e \cdot 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e}{e^x} = \frac{e}{e^1} = 1$

• Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Como queremos $g'(0)$, es en $x = 0$, así que cogeremos de $f(x)$ la parte $\frac{e(x-1)}{e^x - e}$

$\Rightarrow g(x) = (e^x - e) \cdot \frac{e(x-1)}{e^x - e} \Rightarrow g(x) = e(x-1) \Rightarrow g'(x) = e \Rightarrow g'(0) = e$

c) $\int_1^5 \sqrt{\frac{1}{4x-3}} dx = \int_1^5 \frac{1}{\sqrt{4x-3}} dx = \int_1^5 \frac{1}{(4x-3)^{1/2}} dx = \int_1^5 (4x-3)^{-1/2} dx = \frac{1}{4} \int_1^5 4 \cdot (4x-3)^{-1/2} dx$
 $= \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{(4x-3)^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right]_1^5 = \left[\frac{2(4x-3)^{1/2}}{4} \right]_1^5 = \left[\frac{\sqrt{4x-3}}{2} \right]_1^5 = \left(\frac{\sqrt{4 \cdot 5 - 3}}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{4 \cdot 1 - 3}}{2} \right) = 1,56$

2022 JUNIO COINCIDENTES A. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

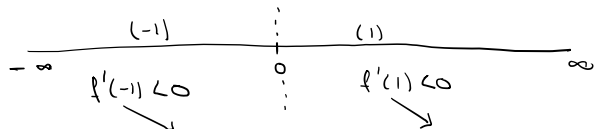
Sea la función $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

a) (1 punto) Determine el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

b) (1,5 puntos) Dada la función $g(x) = \frac{5-x}{2}$, halle el área de la región acotada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x} \rightarrow x \neq 0$ $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = \frac{0 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{x^2} = 0 \Rightarrow -1 \neq 0$ No hay posibles máx. o mín.



crece = NO CRECE
decrece = $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

b)
$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{1}{x} \\ g(x) &= \frac{5-x}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} = \frac{5-x}{2} \Rightarrow \frac{2x}{2x} + \frac{2}{2x} = \frac{5x-x^2}{2x} \Rightarrow 2x+2 = 5x-x^2 \Rightarrow x^2-3x+2=0$$

$\Rightarrow \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}$

$$A = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{5-x}{2}\right) dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{2} + \frac{x}{2}\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right) dx$$

$= \left[\ln|x| + \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}x \right]_1^2 = \left(\ln|2| + \frac{4}{4} - 3 \right) - \left(\ln|1| + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) = \ln|2| - \frac{1}{2}$

2022 JUNIO COINCIDENTES B. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea $f(x)$ una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = 2, f(2) = 1, f'(1) = 1$ y $f'(2) = 2$. Se consideran, además, las funciones $g(x) = (f(x))^2$ y $h(x) = (f \circ f)(x)$. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular $g(2)$ y $g'(2)$.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $h(x)$ en el punto $x=1$.

c) (1 punto) Probar, utilizando el Teorema del Valor Medio, que existe un punto en el intervalo $(1,2)$ en el que el valor de la derivada de $f(x)$ es -1 .

a) $g(2) = (f(2))^2 = 1^2 = 1$ $\Rightarrow$ si $g(x) = (f(x))^2 \Rightarrow g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$

$\Rightarrow g'(2) = 2 \cdot f(2) \cdot f'(2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ $\Rightarrow$

b) $h(x) = (f \circ f)(x) \Rightarrow h(x) = f(f(x))$

$h'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$

• ECUACIÓN RECTA TANGENTE $y = m(x-a) + b$

PUNTO DE TANGENCIA $\Rightarrow P(a,b) = (1,b) \Rightarrow b = h(1) = f(f(1)) = f(2) = 1 \Rightarrow P(1,1)$

$m = h'(1) = h'(1) = f'(f(1)) \cdot f'(1) = 1 \cdot f'(2) = 1 \cdot 2 = 2 \Rightarrow m = 2$

$y = 2(x-1) + 1 \Rightarrow y = 2x - 1$ $\Rightarrow$

c) T.V.M. $(1,2)$

$\textcircled{1} f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{1-2}{1} = -1$ $\Rightarrow$ ES CORRECTO.

2022 JUNIO A. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (0,5 puntos) Estudie si $f(x)$ presenta algún tipo de simetría par o impar.

c) (1 punto) Calcule la siguiente integral $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6} dx$.

a) CONTINUIDAD en $x=0$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} &= 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} &= 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow$ CONTINUA EN $x=0$

DERIVABILIDAD EN $x=0$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} + x^3 \cdot \left(\frac{0 \cdot x^2 - (-1) \cdot 2x}{x^4} \right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 e^{-\frac{1}{x^2}} + 2e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 e^{-\frac{1}{x^2}} + 2e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 3x^2 e^{-\frac{1}{x^2}} + 2e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ **ES DERIVABLE EN $x=0$**

b) Para que haya simetría par se debe cumplir que $f(x) = f(-x)$.

$$f(-x) = \begin{cases} (-x)^3 \cdot e^{-1/(-x)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = \begin{cases} -x^3 \cdot e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$f(x) \neq f(-x)$
No hay simetría par.

• Para que haya simetría impar se debe cumplir que $f(-x) = -f(x)$

$$-f(x) = \begin{cases} -x^3 e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(-x) = -f(x) \checkmark$$

Hay simetría impar.

$$c) \int_1^5 \frac{x^3 e^{-1/x^2}}{x^6} dx = \int_1^5 \frac{e^{-1/x^2}}{x^3} dx = \int_1^5 \frac{1}{x^3} \cdot e^{-1/x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{2}{x^3} \cdot e^{-1/x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{-1/x^2} \right]_1^5$$

$$= \left(\frac{e^{-1/25}}{2} - \frac{e^{-1}}{2} \right) = 0,297$$

$\frac{1}{x^2} = -x^{-2} \Rightarrow 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$
DERIVADA

2022 JUNIO B. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

a) (0,5 puntos) Compruebe si $f(x)$ verifica la hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-1,1]$.

b) (1 punto) Calcule y clasifique los extremos relativos de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

c) (1 punto) Determine el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[-1,1]$.

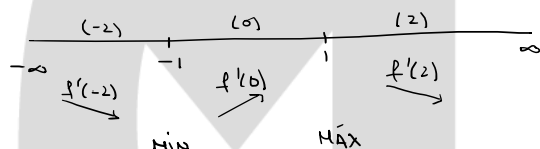
a) ① $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ Dom $f(x) = \mathbb{R} \checkmark$ CONTINUA en $[-1,1]$

② $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{2} < 0$

③ $f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2} > 0$

Si cumple el Teorema de Bolzano porque según el Teorema, si una función, en un intervalo $[a,b]$ es continua y además $f(a)$ tiene distinto signo que $f(b)$, entonces existe valor c , tal que $f(c)=0$.

b) $f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0$
 $-x^2+1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1 \vee x=-1$



$f(-1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ HAY UN MÍNIMO EN $P(-1, -\frac{1}{2})$

$f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ HAY UN MÁXIMO EN $P(1, \frac{1}{2})$

c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
 $y=0 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow x=0$

$A_1 = \int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} [\ln|x^2+1|]_{-1}^0 = \left(\frac{1}{2} \cdot \ln 1 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \ln 2 \right) = -\frac{1}{2} \ln 2$ $A_1 = \frac{1}{2} \ln 2$

$A_2 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln|x^2+1| \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$ $\Rightarrow A_{\text{TOTAL}} = A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \ln 2$

2022 MODELO A. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x e^{4-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en $(0, \infty)$.

c) (0.75 puntos) Calcule $\int_0^2 f(x) dx$.

a) CONTINUIDAD en $x=0$

$$f(0) = 0 \cdot e^4 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{4-x^2} = 0 \cdot e^4 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{\cos x}{x} = 1 - \frac{0}{0} \text{ IND} \Rightarrow \text{L'H} \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{\cos x}{x} = 1 - \frac{\cos 0}{1} = 1 - \frac{1}{1} = 0$$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
ES CONTINUA EN $x=0$

DERIVABILIDAD en $x=0$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 - \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2} \\ 1 \cdot e^{4-x^2} + x \cdot (-2x) e^{4-x^2} \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{-x \cos x + \sin x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ e^{4-x^2} - 2x^2 e^{4-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{4-x^2} - 2x^2 e^{4-x^2} = e^4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x \cos x + \sin x}{x^2} = -\frac{0}{0} \text{ IND} \quad \text{L'H} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1 \cdot \cos x + x \sin x + \cos x}{2x} = \frac{0}{0} \text{ IND} \Rightarrow \text{L'H}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x + 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x - \sin x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x + x \cos x}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ NO ES DERIVABLE EN $x=0$

b) $g(x) = x e^{4-x^2}$ ① Dom $f(x) = (0, \infty)$

$$\textcircled{2} g'(x) = 1 \cdot e^{4-x^2} + x \cdot (-2x) e^{4-x^2} \Rightarrow e^{4-x^2} - 2x^2 e^{4-x^2} = 0 \Rightarrow e^{4-x^2} \cdot (1-2x^2) = 0$$

$$\Rightarrow e^{4-x^2} = 0 \quad \text{X}$$

$$\Rightarrow 1-2x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \begin{matrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \checkmark \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ NO VALE PORQUE NO ESTÁ EN } (0, \infty) \end{matrix}$$

③ $g'(0,1) = e^{4-0,1^2} \cdot (1-2 \cdot 0,1^2) = 52,97 > 0 \quad \nearrow$
 $g'(3) = e^{4-3^2} \cdot (1-2 \cdot 3^2) = -0,119 < 0 \quad \searrow$

$$\cdot f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{4-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{4-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{7}{2}}$$

• Hay un máximo en $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{7}{2}}\right)$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_0^2 x e^{4-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int_0^2 -2x \cdot e^{4-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} \cdot e^{4-x^2} \right]_0^2 = \left(-\frac{e^{4-2^2}}{2} \right) - \left(-\frac{e^{4-0^2}}{2} \right) \\ &= -\frac{e^0}{2} + \frac{e^4}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{e^4}{2} = \frac{-1+e^4}{2} \end{aligned}$$

2022 MODELO B. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea $f(x) = x + x^2$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de $f(x)$ y la recta $y = 2x$.

b) (1.5 puntos) Una partícula en movimiento parte del origen y sigue la trayectoria determinada por la gráfica de f . En el punto $(1, f$

(1)) la partícula sale despedida en la dirección de la recta tangente. Determinar en qué punto choca con la recta vertical $x = 2$.

a) $f(x) = x + x^2$ } $x + x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x + x = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x \cdot (x-1) = 0 \xrightarrow{x=0} x=1$
 $y = 2x$

$$A = \int_0^1 ((x+x^2) - 2x) dx = \int_0^1 (x^2 - x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{6} \quad A = \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6} \text{ u}^2$$

b) $P(0,0) \rightarrow P(1, f(1))$

$$f(1) = 1 + 1^2 = 2 \Rightarrow P(1,2)$$

Ecuación RECTA TANGENTE $y = m(x-a) + b$

$$m = f'(x) = 1 + 2x \Rightarrow m = f'(1) = 3 \quad \left. \begin{matrix} y = 3(x-1) + 2 \Rightarrow y = 3x - 1 \end{matrix} \right\}$$

$P_{\text{TANGENCIA}} = (1,2)$

PUNTO DE CORTES

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \quad \boxed{P(2, 5)}$$

2021 JULIO A. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

a) (1, 25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a. 1) (0,5 puntos) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x}$ a. 2) (0,75 puntos) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{\sin \frac{1}{x}} \right)$

(Indicación: usa el cambio de variable $t=1/x$ donde sea necesario).

b) (1,25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

b. 1) (0,5 puntos) $\int \frac{x}{x^2-1} dx$ b. 2) (0,75 puntos) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

a)

a. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x^3}{x-2x^2-\sin x} = \frac{0}{0} \text{ IND} \Rightarrow \text{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-6x^2}{1-4x-\cos x} = \frac{0}{0} \text{ IND} \Rightarrow \text{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-12x^2}{-4+\sin x} = \frac{2}{-4} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

a. 2) si $t = \frac{1}{x}$ cuando $x \rightarrow \infty \Rightarrow t = \frac{1}{\infty} \Rightarrow t \rightarrow 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \left(3t - \frac{2}{\sin t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(3t^2 - \frac{2t}{\sin t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{3t^2 \sin t - 2t}{\sin t} \right) = \frac{0}{0} \text{ IND} \text{ L'H}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{6t \cdot \sin t + 3t^2 \cdot \cos t - 2}{\cos t} = \frac{-2}{1} = \boxed{-2}$$

b)

b. 1) $\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-1} dx = \boxed{\frac{1}{2} \ln|x^2-1| + C}$

b. 2) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - \int -2x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx$

$$u = x^2 \quad du = 2x$$

$$dv = e^{-x} \quad v = \int e^{-x} dx = -\int e^{-x} dx = -e^{-x} \quad \left\| \begin{array}{l} u = 2x \quad du = 2 \\ dv = e^{-x} \quad v = -e^{-x} \end{array} \right.$$

$$= -x^2 \cdot e^{-x} + \left(-2x e^{-x} - \int -2e^{-x} dx \right) = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + \int 2e^{-x} dx = \left[-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} \right]_0^1$$

$$= (-1^2 \cdot e^{-1} - 2e^{-1} - 2e^{-1}) - (-0^2 e^{-0} - 2 \cdot 0 \cdot e^{-0} - 2e^{-0}) = -5e^{-1} + 2 = \boxed{-\frac{5}{e} + 2}$$

2021 JULIO B. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea la función $f(x) = x^3 - |x| + 2$.

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.

c) (0,75 puntos) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de f , el eje de abscisas $y = 0$, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 - x + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 + x + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \\ 3x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

CONTINUIDAD EN $x=0$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^3 - 0 + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - x + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 + x + 2 = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \\ \text{CONTINUA EN } x=0 \end{array}$$

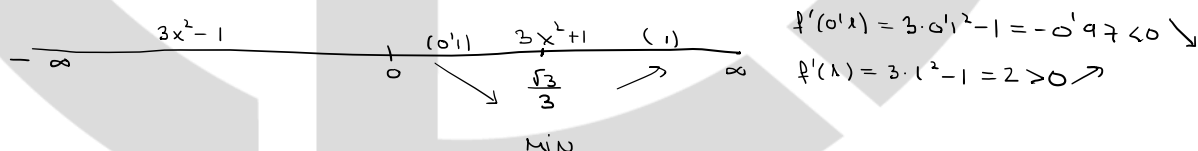
DERIVABILIDAD EN $x=0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 - 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 + 1) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \\ \text{NO DERIVABLE EN } x=0 \end{array}$$

b) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 1 = 0 & 3x^2 = 1 & x^2 = \frac{1}{3} & x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 3x^2 + 1 = 0 & 3x^2 = -1 & x^2 = -\frac{1}{3} & x = \pm \sqrt{-\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \checkmark$ posible máx o mín
 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ NO VALE < 0



$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 = \frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{6}{3} = \frac{2\sqrt{3}+6}{3}$$

HAY UN MÍNIMO EN $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}+6}{3}\right)$

$$c) \begin{cases} f(x) = \begin{cases} x^3 - x + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 + x + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \\ y = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^0 (x^3 + x + 2) dx + \int_0^1 (x^3 - x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1$$

$$= -\left(\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1)\right) + \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} + 2\right) = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 3 u^2$$

2021 JUNIO COINCIDENTES B. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea la función $f(x) = \sqrt[5]{(x-2)^2}$.

a) (0,5 puntos) Estudie su continuidad y derivabilidad en $[-2, 4]$.

b) (1,25 puntos) Analice crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos absolutos de f en $[-2, 4]$.

c) (0,75 puntos) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ es continua en $x = 2$ y si tiene recta tangente en dicho punto.

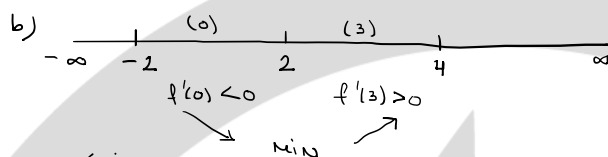
$$a) f(x) = \sqrt[5]{(x-2)^2} \quad f'(x) = \frac{2(x-2)}{5 \cdot \sqrt[5]{(x-2)^3}} = \frac{2(\cancel{x-2})}{5(\cancel{x-2}) \sqrt[5]{(x-2)^3}} = \frac{2}{5 \sqrt[5]{(x-2)^3}}$$

Dom $f(x) = \mathbb{R} \rightarrow$ La función $f(x)$ es continua en $[-2, 4]$

$$f'(x) = \frac{2}{5 \sqrt[5]{(x-2)^3}}$$

$$(x-2)^3 = 0 \Rightarrow (x-2) = 0 \quad x = 2$$

La función $f(x)$ es derivable en $[-2, 4]$ salvo en $x = 2$.



DECRECE $(-2, 2)$
CRECE $(2, 4)$

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

$$f(-2) = \sqrt[5]{(-2-2)^2} = \sqrt[5]{16}$$

$$f(2) = \sqrt[5]{0} = 0$$

$$f(4) = \sqrt[5]{(4-2)^2} = \sqrt[5]{4}$$

EN $P(-2, \sqrt[5]{16})$ MÁXIMO ABSOLUTO

EN $P(2, 0)$ MÍNIMO ABSOLUTO Y RELATIVO

$$c) g(x) = \frac{2}{5 \sqrt[5]{(x-2)^3}}$$

$$\text{Dom } g(x) = \mathbb{R} - \{2\}$$

NO ES CONTINUA EN $x = 2$, POR TANTO, NO ES DERIVABLE Y NO HAY RECTA TANGENTE

2021 JUNIO A. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Calcula el área de la región limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 2 + x - x^2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x$$

$$\begin{cases} f(x) = 2 + x - x^2 \\ g(x) = 2x^2 - 4x \end{cases} \quad 2x^2 - 4x = 2 + x - x^2 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$A = \int_{-\frac{1}{3}}^2 (3x^2 - 5x - 2) dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 2x \right]_{-\frac{1}{3}}^2 =$$

$$= \left(2^3 - \frac{5 \cdot 2^2}{2} - 4\right) - \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{5}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = (-6) - \left(-\frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3}\right) = -6 + \frac{1}{27} + \frac{5}{18} - \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{343}{54} \Rightarrow |A| = \frac{343}{54} u^2$$

2021 JUNIO B. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < 0 \\ xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$. Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.

c) (0.75 puntos) Calcule $\int_{-\pi/2}^1 f(x) dx$.

$$a) f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < 0 \\ xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ e^x + xe^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

CONTINUIDAD EN $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Como } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

CONTINUA EN $x = 0$

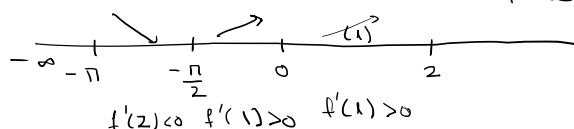
DERIVABILIDAD EN $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x + xe^x &= e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ Como } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$$

ES DERIVABLE EN $x = 0$

b) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$, por tanto, continua en $(-\pi, 2)$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{aligned} \cos x &= 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \rightarrow x = -\frac{\pi}{2} < 0 \checkmark \\ e^x + xe^x &= 0 \rightarrow e^x(1+x) = 0 \rightarrow e^x = 0 \text{ NO VALE} \\ x &= -1 < 0 \text{ NO VALE} \end{aligned}$$



CRECE $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, 2)$
DECRECE $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$

Ahora $[0, 1]$ con TEOREMA DE BOLZANO. En el intervalo $[0, 1]$ $f(x) = xe^x$

$$f(x_0) = 2 \Rightarrow g(x) = f(x) - 2 \Rightarrow g(x) = xe^x - 2$$

$\text{Dom } g(x) = \mathbb{R} \rightarrow$ CONTINUA EN $x \in [0, 1]$

$$g(0) = 0e^0 - 2 = -2 < 0$$

$$g(1) = 1 \cdot e^1 - 2 = e - 2 > 0$$

Como $g(x)$ es continua en $[0, 1]$ y además $g(0)$ tiene distinto signo que $g(1)$, hay un valor c donde $g(c) = 0$, y por tanto demuestra que existe un valor x_0 que cumpla $f(x_0) = 2$.

2021 MODELO A. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudia la continuidad de f .

b) (1 punto) Halla las asíntotas de f .

c) (1 punto) Determina el valor de $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente $-\frac{1}{2}$. Escribe la ecuación de dicha recta tangente.

$$a) f(x)_1 = \frac{2}{x+1} \quad \text{si } x \leq 1 \quad x+1=0 \quad x=-1 \leftarrow \text{No hay función en } x=-1$$

$$f(x)_2 = \frac{\ln x}{x-1} \quad \text{si } x > 1 \quad \begin{aligned} x &> 0 \\ x-1 &= 0 \Rightarrow x=1 \end{aligned}$$

$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$
NO ES CONTINUA EN $x = -1$

CONTINUIDAD EN $x = 1$

$$f(1) = \frac{2}{1+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{0}{0} \text{ IND} \rightarrow \text{L'H} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{x+1} = 1$$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
ES CONTINUA EN $x = 1$

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ menos en $x = -1$

b) A.V en $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{0} \text{ IND} \quad \text{HAY A.V en } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{x+1} = \left(\frac{2}{-0.99+1} \right) = \frac{+}{+} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{x+1} = \frac{+}{-} = -\infty$$

A.H

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} \quad \text{L'H} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Hay A.H en $y=0$

A.O No hay porque hay A.H cuando
 $x \rightarrow \infty$ y $x \rightarrow -\infty$.

c) Para $x < 1 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x+1} \quad m = \frac{-1}{2}$

$$m = f'(x) = \frac{-1}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot (x+1) - 2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{-2}{(x+1)^2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow 4 = (x+1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 4 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \quad \begin{matrix} x = 1 \text{ NO VALE} \\ x = -3 < 1 \checkmark \end{matrix}$$

ECUACIÓN RECTA TANGENTE $y = m(x-a) + b$

$$m = f'(x) = \frac{-1}{2}$$

$$P_T(-3, f(-3)) \quad f(-3) = \frac{2}{-3+1} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow P_T(-3, -1)$$

$$y = \frac{-1}{2} \cdot (x+3) - 1 \Rightarrow y = \frac{-x}{2} - \frac{3}{2} - 1 \quad \boxed{y = \frac{-x}{2} - \frac{5}{2}}$$

2021 MODELO B. 2. (Calificación máxima: 2,5 puntos)

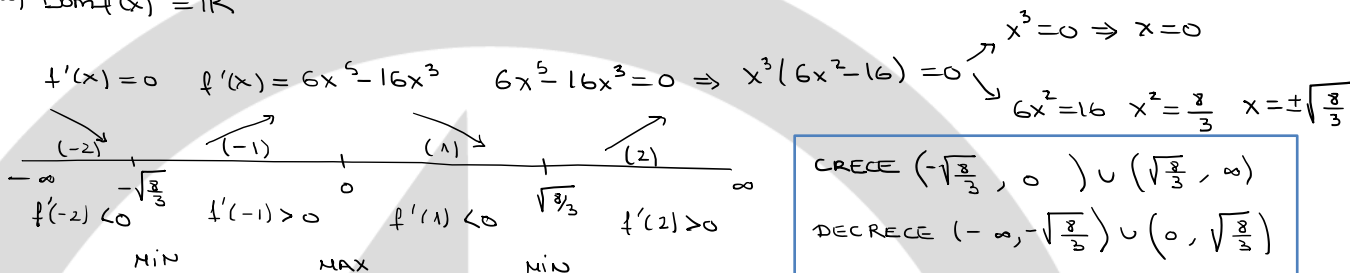
Dada la función $f(x) = x^6 - 4x^4$, se pide:

a) (0,5 puntos) Estudie sus intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) (1 punto) Encontrar sus máximos y mínimos locales, y determinar si son o no globales.

c) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por el eje $y=0$ y la gráfica de f .

a) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$



b) $f(-\sqrt{\frac{8}{3}}) = (-\sqrt{\frac{8}{3}})^6 - 4 \cdot (-\sqrt{\frac{8}{3}})^4 = \frac{-256}{27} \quad P_1(-\sqrt{\frac{8}{3}}, \frac{-256}{27})$ MÍNIMO

$f(0) = 0 \quad P_2(0, 0)$ MÁXIMO

$f(\sqrt{\frac{8}{3}}) = \frac{256}{27} \quad P_3(\sqrt{\frac{8}{3}}, \frac{256}{27})$ MÍNIMO

Para saber si son relativos o absolutos, hacemos límites al infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^6 - 4x^4 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^6 - 4x^4 = \infty$$



El máximo $P_2(0,0)$ ES RELATIVO
Los mínimos P_1 y P_3 SON ABSOLUTOS

c) $f(x) = x^6 - 4x^4$
 $y = 0$
 $x^6 - 4x^4 = 0 \Rightarrow x^4(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$
 $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$$A = \int_{-2}^0 (x^6 - 4x^4) dx + \int_0^2 (x^6 - 4x^4) dx = 2 \cdot \int_0^2 (x^6 - 4x^4) dx = 2 \cdot \left[\frac{x^7}{7} - \frac{4x^5}{5} \right]_0^2 = 2 \cdot \left(\frac{2^7}{7} - \frac{4 \cdot 2^5}{5} \right)$$

$$= \frac{-512}{35} \quad \boxed{|A| = \frac{512}{35} u^2}$$

2020 SEPTIEMBRE A.2 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \frac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}, \text{ se pide:}$$

a) (0,5 puntos) Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.

b) (1,25 puntos) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.

c) (0,75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

$$a) f(0) = \frac{0-1}{0^2-1} = 1 \quad f \circ f(0) = f(f(0)) = f(1) = \frac{1^2+1}{4 \cdot 1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

b) CONTINUIDAD EN $x=1$

$$f(1) = \frac{1^2+1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{4x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0} \text{ IND} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Como } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \\ \text{CONTINUA EN } x=1 \end{array} \right\}$$

DERIVABILIDAD EN $x=1$

$$f'(x)_1 = \frac{1 \cdot (x^2-1) - (x-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2+2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2+2x-1}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)_2 = \frac{2x \cdot 4x - (x^2+1) \cdot 4}{16x^2} = \frac{8x^2-4x^2-4}{16x^2} = \frac{4x^2-4}{16x^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+2x-1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x < 1 \text{ y } x \neq -1 \\ \frac{4x^2-4}{16x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2+2x-1}{(x^2-1)^2} = \frac{0}{0} \text{ IND} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^2-4}{16x^2} = \frac{0}{16} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Como } \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \\ \text{NO ES DERIVABLE EN } x=1 \end{array} \right\}$$

2020 JULIO COINCIDENTE A.2 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{2} - \sin x + x \cos x$, se pide:

a) (0,5 puntos) Estudiar su crecimiento en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Justificar, usando el teorema adecuado, que la función se anula en algún punto de ese intervalo. Justificar razonadamente que ese punto es único.

b) (1 punto) Calcular $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$.

$$a) \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \Rightarrow \text{CONTINUA EN } [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$f'(x) = -\cos x + 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) = -x \sin x$$

$$f'(x) = 0 \quad -x \sin x = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} -x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{NO VALEN PORQUE NO ESTÁN DENTRO} \\ \text{DEL INTERVALO} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} (1) \text{---} \\ \text{0} \quad \quad \quad \frac{\pi}{2} \\ f'(1) < 0 \end{array} \quad \boxed{\text{DECRECE } (0, \frac{\pi}{2})}$$

$$\begin{array}{l} f(0) = \frac{1}{2} - \sin 0 + 0 \cdot \cos 0 = \frac{1}{2} > 0 \\ f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} - \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0 \end{array}$$

Siendo el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ continuo, y $f(0)$ tiene distinto signo que $f(\frac{\pi}{2})$, según el TEOREMA DE BOLZANO, existe un valor $c \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donde $f(c) = 0$.

Ese valor c , es Único, debido a que la función es decreciente en ese intervalo.

$$b) \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \sin x + x \cos x \right) dx = \left[\frac{1}{2}x + \cos x + x \sin x + \cos x \right]_0^{\pi/2} =$$

$$\begin{aligned} \int x \cos x &= x \sin x - \int \sin x = x \sin x + \cos x \\ u &= x \quad du = 1 \\ dv &= \cos x \quad v = \int \cos x = \sin x \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 \cos 0 + 0 \cdot \sin 0 \right) \\ &= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) - 2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{3\pi}{4} - 2 \end{aligned}$$

2020 JULIO A.2 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

- a) (0,5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.
b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.
c) (1 punto) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx$.

a) Para que se corten se debe cumplir $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 0$

Vamos a llamar $h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow h(x) = x^3 + 3x^2 - 1 - 6x \Rightarrow h(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$

$\text{Dom } h(x) = \mathbb{R}$

$h(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 1 = -3 < 0$

$h(10) = 10^3 + 3 \cdot 10^2 - 6 \cdot 10 - 1 > 0$

Como $h(x)$ es continua en $[1, 10]$ y el signo de $h(1)$ es distinto al signo de $h(10)$, según el teorema de Bolzano, habrá un valor donde $h(x) = 0$.

Por tanto se cumple que $f(x) - g(x) = 0$ y $f(x) = g(x)$ demostrando que si se cortan.

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

$m = f'(x) = 3x^2 + 6x \rightarrow$ como queremos que sea mínima, hacemos $m' = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

$P_T(-1, b) \Rightarrow b = f(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 1 = -1 + 3 - 1 = 1 \Rightarrow P_T(-1, 1)$

$m = f'(-1) = 3(-1)^2 + 6 \cdot (-1) = 3 - 6 = -3$

Ecuación de la recta tangente $\Rightarrow y = m(x - a) + b$

$y = -3 \cdot (x + 1) + 1 \Rightarrow y = -3x - 4$

c) $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x} dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{6x} + \frac{3x^2}{6x} - \frac{1}{6x} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3x}{6} - \frac{1}{6x} \right) dx$
 $= \left[\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{6} \ln|x| \right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{18} + \frac{2^2}{4} - \frac{1}{6} \cdot \ln|2| \right) - \left(\frac{1^3}{18} + \frac{1^2}{4} - \frac{1}{6} \cdot \ln|1| \right)$
 $= \frac{8}{18} + 1 - \frac{1}{6} \cdot \ln|2| - \frac{1}{18} - \frac{1}{4} = \frac{41}{36} - \frac{1}{6} \ln|2|$

2020 JULIO B.2 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea la función

$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) (0,5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.

b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.

c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x=1$.

a) $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

CONTINUIDAD EN $x=1$

$f(1) = (1-1)^2 = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^3 = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 = 0$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
 CONTINUA EN $x=1$

$\Rightarrow$ La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[-4, 4]$

b) $f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

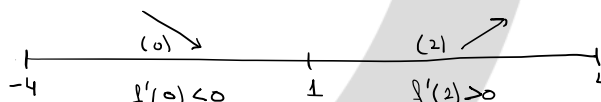
$\lim_{x \rightarrow 1^+} 3(x-1)^2 = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x-1) = 0$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$
 DERIVABLE EN $x=1$

La función $f(x)$ es derivable en $[-4, 4]$

$f'(x)_1 = 2(x-1) \quad 2(x-1) = 0 \Rightarrow x=1$

$f'(x)_2 = 3(x-1)^2 \quad 3(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x=1$



DECRECE $(-\infty, 1)$ y CREECE $(1, \infty)$

c) $g(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 6(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$

CONTINUIDAD EN $x=1$

$$\left. \begin{array}{l} g(1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 3(x-1)^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x-1) = 0 \end{array} \right\} \text{ Como } (1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \\ \boxed{g(x) \text{ ES CONTINUA EN } x=1}$$

DERIVABILIDAD EN $x=1$

$$\left. \begin{array}{l} g'(1^+) = 0 \\ g'(1^-) = 2 \end{array} \right\} \boxed{\text{NO ES DERIVABILIDAD EN } x=1.}$$

2020 MODELO A.2 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Dada la función $f(x) = e^{3x-2}$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el punto en el que la tangente a la curva $y = f(x)$ tiene pendiente igual a $\frac{3}{e}$ y escribir la ecuación de esta recta tangente.

b) (0,5 puntos) Calcular $\lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{1-f(x)}{6x-4}$.

c) (1 punto) Calcular el área de la superficie acotada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x=0, y=1$.

a) $m = f'(x) = \frac{3}{e} \quad f'(x) = 3e^{3x-2} \Rightarrow 3e^{3x-2} = \frac{3}{e} \Rightarrow e^{3x-2} = e^{-1} \Rightarrow 3x-2 = -1$
 $\Rightarrow 3x = 1 \quad x = \frac{1}{3}$

$P_{\text{TANGENCIA}} = (\frac{1}{3}, b) \Rightarrow b = f(\frac{1}{3}) = e^{3 \cdot \frac{1}{3} - 2} = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{P_T(\frac{1}{3}, \frac{1}{e})}$

ECUACIÓN RECTA TANGENTE

$y = m(x-a) + b \Rightarrow y = \frac{3}{e}(x - \frac{1}{3}) + \frac{1}{e} \quad y = \frac{3x}{e} - \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{y = \frac{3x}{e}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{1-f(x)}{6x-4} = \lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{1-e^{3x-2}}{6x-4} = \frac{0}{0} \text{ IND } L'H \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2/3} \frac{-3e^{3x-2}}{6} = \frac{-3e^0}{6} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

c) $\left. \begin{array}{l} f(x) = e^{3x-2} \\ y = 1 \\ x = 0 \end{array} \right\} e^{3x-2} = 1 \Rightarrow 3x-2 = 0 \Rightarrow \underline{x = \frac{2}{3}}$

$A = \int_0^{2/3} (e^{3x-2} - 1) dx = \left[\frac{1}{3} e^{3x-2} - x \right]_0^{2/3} = \left(\frac{1}{3} e^0 - \frac{2}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} e^{-2} - 0 \right) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{3e^2}$
 $= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3e^2} \Rightarrow |A| = \frac{1}{3} + \frac{1}{3e^2} = \frac{e^2+1}{3e^2} u^2 = \boxed{0'378 u^2}$

2020 MODELO B.2 (Calificación máxima: 2,5 puntos)

Sea $f(x) = \frac{3}{x+1}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x=2$.

b) (0,75 puntos) Determinar las posibles asíntotas de la curva $y = f(x)$ y estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) (0,75 puntos) Calcular $\int_0^2 xf(x) dx$.

a) ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE: $y = m(x-a) + b$

$m = f'(x) = \frac{0 \cdot (x+1) - 3 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2} \Rightarrow m = f'(2) = \frac{-3}{3^2} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$

$P_{\text{TANGENCIA}}(a, b) = (2, b) \Rightarrow b = f(2) = \frac{3}{2+1} = 1 \Rightarrow P_T(2, 1)$

$y = -\frac{1}{3}(x-2) + 1 \quad y = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3} + 1 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{x}{3} + \frac{5}{3}}$

b) $f(x) = \frac{3}{x+1} \quad x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$

• A.V en $x=-1$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3}{x+1} = \frac{3}{0} \text{ IND } \boxed{\text{Hay A.V en } x=-1}$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3}{x+1} = \frac{+}{+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3}{x+1} = \frac{+}{-} = -\infty \end{array} \right\} \nearrow$

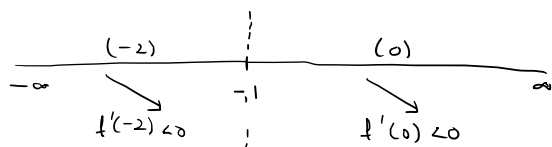
• A.H

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x+1} = 0 \end{array} \right\} \boxed{\text{A.H en } y=0}$

• A.O

No hay porque hay A.H tanto en $x \rightarrow \infty$ como $x \rightarrow -\infty$

• $f'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow -3 \neq 0$ No hay Mx ni Mn.



DECRECE $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

c) $\int_0^2 x f(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{3}{x+1} dx = \int_0^2 \frac{3x}{x+1} dx = \int_0^2 3 dx + \int_0^2 \frac{-3}{x+1} dx =$

$$\begin{array}{r} 3x \quad (x+1) \\ -3x-3 \quad 3 \\ \hline -3 \end{array}$$

$$= [3x]_0^2 + [-3 \ln|x+1|]_0^2 = 6 + (-3 \ln 3 - (-3 \ln 1))$$

$$= \boxed{6 - 3 \ln 3}$$